Examen Analyse II

26 januari 2018

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie.
   (a) Stel dat $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$ een C^1-functie is zodat $\phi(0, 0) = (0, 0)$ en $(d\phi)(0, 0)$ inverteerbaar is. Toon aan dat $f \circ \phi_1$ totaal afleidbaar is in 0 als en slechts als f afleidbaar is in 0.
   (b) Stel nu dat $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie zodat $\psi(0, 0) = 0$ en $(\partial_1\psi)(0, 0)$ en $(\partial_2\psi)(0, 0)$ niet beide 0. Gebruik $\phi(x, y) = (\psi(x, y), y)$ of $\phi(x, y) = (\psi(x, y), x)$ om aan te tonen dat $f \circ \psi$ totaal afleidbaar is in $(0, 0)$ als en slechts als f afleidbaar is in 0.

2. Stel dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie is. Stel dat
$$g : \sup_{\varepsilon>0} \frac{|f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon)|}{2\varepsilon}$$
kwadratisch integreerbaar is. Toon aan dat $\hat{f}$ integreerbaar is. (Kijk naar Stelling 4.23)

3. Zijn deze uitspraken waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
   (a) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Dan is $\hat{f}$ kwadratisch integreerbaar.
   (b) Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integreerbaar. Dan is $g_x(y) = f(x, y)$ integreerbaar voor alle $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Zij H een Hilbertruimte en K een deelruimte van H. Dan is $(K^\perp)^\perp = K$.

4. Definieer $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \int\limits_0^{+\infty} \frac{Bgtan(xt)}{1+t^2} dt$.
   (a) Bewijs dat F afleidbaar is in elk punt $x \neq 0$.
   (b) Bepaal $\lim\limits_{+\infty} F(x)$.
   (c) Bewijs dat $\lim\limits_{0} \frac{F(x)}{x} = +\infty$. Je mag gebruiken dat $\frac{Bgtan(u)}{u}$ stijgt naar 1 als u daalt naar 0.