

ANALYSE II

(16/01/2009 (8u-12u))

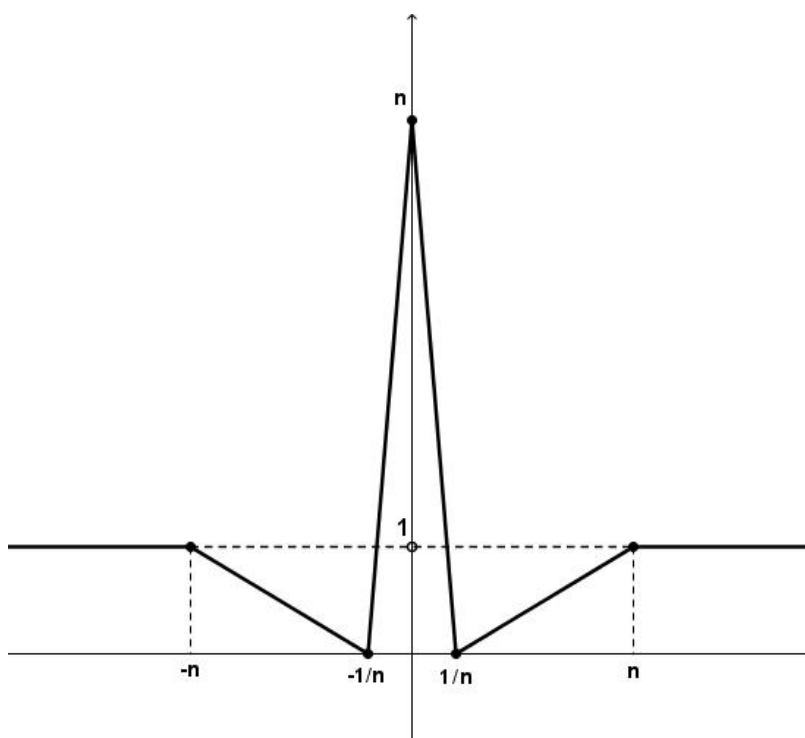
- 1 Definieer zoals hieronder de functies $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Voor alle duidelijkheid: voor $x \leq -n$ en $x \geq n$ is $f(x) = 1$. Tussen $x = -n$ en $x = -\frac{1}{n}$ daalt de functie lineair van 1 naar 0. Tussen $x = -\frac{1}{n}$ en $x = 0$ stijgt de functie lineair van 0 naar n . Verder is $f(-x) = f(x)$.

Bewijs dat

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x) dx \rightarrow g(0)$$

voor alle integreerbare functies $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die continu zijn in 0.



- 2 Bewijs de volgende veralgemening van het Lemma van Riemann-Lebesgue.

Als $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een continue, 2π -periodische functie is met $\int_0^{2\pi} g(x) dx = 0$, dan geldt voor alle $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dat

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(\lambda x) dx = 0.$$

Hint: Ga op dezelfde manier te werk als bij het bewijs van het Lemma van Riemann-Lebesgue. Dit wil zeggen dat je de eigenschap eerst bewijst wanneer f de indicator-functie van een interval $[a, b]$ is.

- 3 In welke punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \sin(x) \sqrt{|y|}$$

totaal afleidbaar? Bewijs je antwoord nauwkeurig.

- 4 Als we met $e_n \in l^2(\mathbb{Z})$ de standaard basisvectoren noteren, dan is $\|e_n\| = 1$ voor alle n , maar niettemin geldt voor alle $a \in l^2(\mathbb{Z})$ dat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle e_n, a \rangle = 0.$$

- (a) Geef een voorbeeld van een rij in $L^2([0, 2\pi], \lambda)$ met dezelfde eigenschappen.
(b) Zij H een Hilbertruimte en $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een orthonormale familie vectoren in H .
Toon aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, a \rangle = 0$ voor alle $a \in H$.

- 5 Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ gedefinieerd als

$$\mathcal{O} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - z)^2 = 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

en het vectorveld $V(x, y, z) = (0, -x(z + 1), 0)$.