Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor of Science Fysica en Wiskunde

maandag 20 augustus 2012, 14-18 uur

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 3 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	(a) 10 pt		
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 5 pt	(b) 5 pt	

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zoals bekend is $P(X)$ de machtsverzameling van X.

(a) Geef alle elementen van $P(P(X))$ als $X = \emptyset$ en als $X = \{0\}$.

(b) Zij X een verzameling met $|X| = 3$. Tel het aantal functies $f : P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ dat voldoet aan

$$\forall A \in P(X) \setminus \{\emptyset\} : A \in f^{-1}(A).$$

(c) Schrijf de bewering dat de reële rij (a_n) geen Cauchyrij is met behulp van kwantoren, zonder de negatie $\neg$ te gebruiken.

Antwoord 1 (a) Als $X = \emptyset$, dan geldt dat $P(X) = \{\emptyset\}$ en dus dat

$$P(P(X)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Als $X = \{0\}$, dan geldt dat $P(X) = \{\emptyset, \{0\}\}$ en dus

$$P(P(X)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}\}.$$

(b) Er is gegeven dat $|X| = 3$, dus laat ons zeggen dat $X = \{a, b, c\}$. We gaan na wat het betekent dat een functie $f : P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ voldoet aan

$$\forall A \in P(X) \setminus \{\emptyset\} : A \in f^{-1}(A). \tag{1}$$

Als we (1) bekijken voor $A = \{a\}$ dan zien we dat moet gelden $\{a\} \in f^{-1}(\{a\})$, hetgeen betekent dat $f(\{a\}) = a$. Het beeld van $\{a\}$ ligt dus vast door de voorwaarde (1). Analoog moet gelden $f(\{b\}) = b$ en $f(\{c\}) = c$.

Als we (1) bekijken voor $A = \{a, b\}$ dan vinden we $\{a, b\} \in f^{-1}(\{a, b\})$, hetgeen wil zeggen dat $f(\{a, b\}) = a$ of $f(\{a, b\}) = b$. Er zijn dus twee mogelijke keuzes voor het beeld van $\{a, b\}$. Analoog hebben we twee mogelijke keuzes voor $f(\{a, c\})$, twee keuzes voor $f(\{b, c\})$ en drie voor $f(\{a, b, c\})$. Deze keuzes kunnen we steeds onafhankelijk van elkaar doen. We vinden daarom $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ mogelijke functies die aan (1) voldoen.

(c) Een reële rij (a_n) is een Cauchyrij als

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Een reële rij (a_n) is dus geen Cauchyrij als

$$\exists \epsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| \geq \epsilon.$$

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to X$ een functie. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we een functie $f_n : X \to X$ door $f_0 = I_X$ en

$$f_n = f \circ f_{n-1}, \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0.$$

We definiëren een relatie R op X door $(x, y) \in R$ als en slechts als

$$\exists n \in \mathbb{N} : [f_n(x) = y \ \text{ of } \ f_n(y) = x].$$

(a) Is R reflexief, symmetrisch, transitief ? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(b) Neem aan dat f injectief is. Bewijs met volledige inductie dat f_n injectief is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(c) Neem aan dat f injectief is. Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

[Opmerking: U mag zonder bewijs gebruiken dat $f_m \circ f_n = f_{m+n}$ geldt voor elke $m, n \in \mathbb{N}$.]

Antwoord 2 (a) We controleren de drie definiërende eigenschappen van een equivalentierelatie:

- R is reflexief: voor een willekeurige $x \in X$ geldt dat $f_0(x) = I_X(x) = x$. Er is dus een $n \in \mathbb{N}$ met $f_n(x) = x$ (namelijk $n = 0$), zodat $(x, x) \in R$ voor elke $x \in X$.
- R is symmetrisch: Neem willekeurige $x, y \in X$ met $(x, y) \in R$. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ met $f_n(x) = y$ of $f_n(y) = x$. Uiteraard is dan ook $f_n(y) = x$ of $f_n(x) = y$ en dit betekent dat $(y, x) \in R$.
- R is niet transitief. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door de functie $f : \{x, y, z\} \to \{x, y, z\}$ met $f(x) = f(y) = f(z) = y$. Dan geldt dat $(x, y) \in R$ want $f_1(x) = y$, en $(y, z) \in R$ want $f_1(z) = y$.

  Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ kunnen we eenvoudig nagaan dat $f_n(x) = f_n(z) = y$. Bijgevolg is $f_n(x) \neq z$ en $f_n(z) \neq x$. Ook voor $n = 0$ geldt dit, want $x \neq z$. Dus $(x, z) \notin R$. Dus R is niet transitief.

(b) Zij $f : X \to X$ injectief. We tonen met volledige inductie aan dat f_n injectief is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

- Basisstap: $f_0 = I_X$ is injectief, want als voor $x, y \in X$ geldt dat $f_0(x) = f_0(y)$, dan volgt dat $x = y$.
- Inductiestap: neem aan dat f_n injectief is voor een $n \in \mathbb{N}$. We tonen aan dat f_{n+1} ook injectief is. Neem aan dat voor $x, y \in X$ geldt dat $f_{n+1}(x) = f_{n+1}(y)$. Dan geldt vaanwege de definitie van $f_{n+1} = f \circ f_n$ dat $f(f_n(x)) = f(f_n(y))$. Omdat f injectief is, geldt dan dat $f_n(x) = f_n(y)$, zodat wegens de inductiehypothese geldt dat $x = y$. Dus is f_{n+1} injectief.

- Conclusie: omdat basis- en inductiestap aangetoond zijn, geldt door het principe van volledige inductie dat f_n injectief is voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Enkel de transitiviteit moet nog bewezen worden. Neem aan dat $x, y, z \in X$ met $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in R$. Per definitie betekent dit dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor $f_n(x) = y$ of $f_n(y) = x$, en dat er een $m \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor $f_m(y) = z$ of $f_m(z) = y$. Er zijn dan vier situaties die we afzonderlijk bekijken.

- Neem aan dat $f_n(x) = y$ en $f_m(y) = z$. Dan geldt dat $f_{n+m}(x) = f_m(f_n(x)) = f_m(y) = z$.
- Neem aan dat $f_n(y) = x$ en $f_m(z) = y$. Dan geldt dat $f_{n+m}(z) = f_n(f_m(z)) = f_n(y) = x$.
- Neem aan dat $f_n(x) = y$ en $f_m(z) = y$. Stel dat $n \geq m$, het geval dat $m \geq n$ verloopt volledig analoog. Dan is $f_n = f_m \circ f_{n-m}$ en dus $f_m(f_{n-m}(x)) = f_n(x) = y$. Ook $f_m(z) = y$, zodat vanwege de injectiviteit van f_m geldt dat $f_{n-m}(x) = z$.
- Neem aan dat $f_n(y) = x$ en $f_m(y) = z$. Stel dat $n \geq m$, het geval dat $m \geq n$ verloopt volledig analoog. Dan geldt dat $f_{n-m}(z) = f_{n-m}(f_m(y)) = f_n(y) = x$.

In elk van de vier gevallen vinden we een $p \in \mathbb{N}$ waarvoor ofwel $f_p(x) = z$ ofwel $f_p(z) = x$. Dus $(x, z) \in R$ in alle gevallen, hetgeen de transitiviteit van R bewijst.

Naam:

Vraag 3 Neem aan dat A en B niet-lege, begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren

$$A - B = \{x - y \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Bewijs dat

$$\inf(A - B) = \inf A - \sup B.$$

Antwoord 3 Aangezien A, B en $A - B$ niet-lege begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn, bestaan $\inf(A - B)$, $\inf(A)$ en $\sup(B)$. We tonen aan dat $\inf(A) - \sup(B)$ de grootste ondergrens is voor $A - B$.

Kies een willekeurig element c van $A - B$, dan geldt dat $c = x - y$ voor een $x \in A$ en een $y \in B$. Aangezien $\inf A$ een ondergrens is voor A, geldt dat $\inf A \leq x$. Aangezien $\sup B$ een bovengrens is voor B, geldt dat $\sup B \geq y$, en dus dat $-\sup B \leq -y$. Er geldt bijgevolg dat

$$\inf A - \sup B \leq x - y = c$$

Dit geldt voor elke $c \in A - B$ en dus is $\inf A - \sup B$ een ondergrens van $A - B$.

Stel dat $d > \inf A - \sup B$. We gaan bewijzen dat d geen ondergrens van $A - B$ kan zijn. Neem

$$\varepsilon = \frac{d - (\inf A - \sup B)}{2} > 0.$$

Wegens de eigenschappen van supremum en infimum bestaan er dan een $x \in A$ met $x < \inf(A) + \varepsilon$ en een $y \in B$ met $y > \sup(B) - \varepsilon$. Er geldt dus dat

$$x - y < (\inf A + \varepsilon) - (\sup B - \varepsilon) = \inf A - \sup B + 2\varepsilon = d.$$

Er is dus een element van $A - B$ dat kleiner is dan d. Bijgevolg is d geen ondergrens voor $A - B$.

Er is nu bewezen dat $\inf A - \sup B$ een ondergrens is van $A - B$ en dat elk strikt groter getal geen ondergrens is. Dan is $\inf A - \sup B$ de grootste ondergrens, zodat de gelijkheid

$$\inf(A - B) = \inf A - \sup B$$

volgt.

Alternatieve manier: Een iets ander bewijs gaat als volgt. Het eerste deel van het bewijs hierboven blijft hetzelfde. Het leidt tot het feit dat $\inf A - \sup B$ een ondergrens van $A - B$ is. Het infimum is de grootste ondergrens, zodat we concluderen dat

$$\inf(A - B) \geq \inf A - \sup B. \tag{2}$$

Neem $x \in A$ en $y \in B$ willekeurig. Dan geldt $x - y \geq \inf(A - B)$, hetgeen we ook kunnen schrijven als

$$y \leq x - \inf(A - B).$$

Deze ongelijkheid geldt voor elke $y \in B$. Het rechterlid is dus een bovengrens voor B waaruit we concluderen dat

$$\sup B \leq x - \inf(A - B).$$

Deze ongelijkheid herschrijven we als

$$x \geq \sup B + \inf(A - B).$$

Dit geldt voor elke $x \in A$. Bijgevolg is het rechterlid een ondergrens van A en er geldt

$$\inf A \geq \sup B + \inf(A - B).$$

Deze ongelijkheid kunnen we ook schrijven als

$$\inf(A - B) \leq \inf A - \sup B. \tag{3}$$

De twee ongelijkheden (2) en (3) samen leiden tot de gelijkheid $\inf(A) - \sup(B) = \inf(A - B)$.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van reële getallen.

(b) Voor $k \in \mathbb{N}$ is de functie $f_k : [0,\infty[\to [0,\infty[$ gegeven door

$$f_k(x) = \frac{k+x}{kx+1}, \qquad x \geq 0.$$

Bewijs met behulp van de definitie van convergentie dat de rij $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent is voor elke $x > 0$.

Antwoord 4 (a) Een rij $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van reële getallen is convergent als er een $L \in \mathbb{R}$ bestaat met de eigenschap dat voor elk strikt positief getal ε er een natuurlijk getal n_0 bestaat zodanig dat voor alle $n \geq n_0$ geldt dat de absolute waarde van het verschil tussen f_n en L kleiner is dan ε. In symbolen: de rij $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van reële getallen is convergent als

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 : |f_k - L| < \varepsilon.$$

(b) Kies een willekeurige $x > 0$. We tonen aan dat de rij $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ convergeert naar de limiet $\frac{1}{x}$.

Kies willekeurig $\varepsilon > 0$. Neem

$$k_0 = \left\lceil \frac{x^2+1}{\epsilon x^2} \right\rceil. \tag{4}$$

Neem $k \geq k_0$ willekeurig. Er geldt

$$f_k(x) - \frac{1}{x} = \frac{k+x}{kx+1} - \frac{1}{x} = \frac{(k+x)x - (kx+1)}{x(kx+1)} = \frac{x^2-1}{x(kx+1)}.$$

We nemen hiervan de absolute waarde en gebruiken dat vanwege $x > 0$ geldt

$$|x^2 - 1| < x^2 + 1, \qquad \text{en} \qquad |x(kx+1)| = x(kx+1) > kx^2.$$

Dan vinden we

$$\left| f_k(x) - \frac{1}{x} \right| < \frac{x^2+1}{kx^2}. \tag{5}$$

Uit (4) en $k \geq k_0$ volgt dat

$$k \geq \frac{x^2+1}{\varepsilon x^2},$$

hetgeen we kunnen herschrijven tot

$$\frac{x^2+1}{kx^2} \leq \varepsilon. \tag{6}$$

De twee ongelijkheden (5) en (6) leiden tot

$$\left| f_k(x) - \frac{1}{x} \right| < \varepsilon.$$

Dit toont aan dat de rij inderdaad naar $1/x$ convergeert.

Naam:

Vraag 5 In deze opgave zijn (a_n) en (b_n) twee reële rijen.

(a) Neem aan dat (a_n) convergent is met limiet 0 en dat (b_n) een begrensde rij is. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

(b) Neem aan dat $a_n \geq 0$ en $b_n \geq 0$ voor elke $n \geq 2012$. Bewijs dat

$$\left[\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \vee \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = 0\right]$$

Antwoord 5 (a) Kies een willekeurige $\varepsilon > 0$. Aangezien (b_n) een begrensde rij is, bestaat er een $M \in \mathbb{R}^+$ met $|b_n| < M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Aangezien (a_n) naar 0 convergeert, bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ met $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ als $n \geq n_0$. Dan geldt er voor alle $n \geq n_0$ dat

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

zodat aangetoond is dat de rij $(a_n \cdot b_n)$ inderdaad naar 0 convergeert.

(b) Neem aan dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

en noem

$$A = \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{en} \quad B = \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Aangezien $a_n \geq 0$ en $b_n \geq 0$ voor alle $n \geq 2012$, geldt zeker $A \geq 0$ en $B \geq 0$.

We gaan het verdere bewijs voeren uit het ongerijmde. We nemen dus aan dat

$$A = 0 \quad \vee \quad B = 0$$

niet waar is. Dat betekent dat $A > 0$ en $B > 0$. Neem $\varepsilon > 0$ met $\varepsilon < \min(A, B)$.

Omdat $\liminf a_n = A > \varepsilon$ is er een $n_1 \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\forall n \geq n_1 : \quad a_n > \varepsilon.$$

Omdat $\liminf b_n = B > \varepsilon$ is er een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\forall n \geq n_2 : \quad b_n > \varepsilon.$$

Neem nu $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ en $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt zowel $a_n > \varepsilon$ als $b_n > \varepsilon$. Omdat $\varepsilon > 0$ volgt ook

$$a_n \cdot b_n > \varepsilon^2 \quad \text{voor alle } n \geq n_0.$$

Dit is echter in tegenspraak met de aanname dat $\lim a_n \cdot b_n = 0$.

Uit deze tegenspraak volgt dat $A = 0$ of $B = 0$. De implicatie uit de opgave is hiermee bewezen.