Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor of Science Fysica en Wiskunde

maandag 20 augustus 2012, 14-18 uur

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 3 pt
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	(a) 10 pt		
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 5 pt	(b) 5 pt	

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zoals bekend is $P(X)$ de machtsverzameling van X.

(a) Geef alle elementen van $P(P(X))$ als $X = \emptyset$ en als $X = \{0\}$.

(b) Zij X een verzameling met $|X| = 3$. Tel het aantal functies $f : P(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ dat voldoet aan

$$\forall A \in P(X) \setminus \{\emptyset\} : \, A \in f^{-1}(A).$$

(c) Schrijf de bewering dat de reële rij (a_n) geen Cauchyrij is met behulp van kwantoren, zonder de negatie $\neg$ te gebruiken.

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to X$ een functie. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we een functie $f_n : X \to X$ door $f_0 = I_X$ en

$$f_n = f \circ f_{n-1}, \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0.$$

We definiëren een relatie R op X door $(x, y) \in R$ als en slechts als

$$\exists n \in \mathbb{N} : [f_n(x) = y \text{ of } f_n(y) = x] .$$

(a) Is R reflexief, symmetrisch, transitief ? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(b) Neem aan dat f injectief is. Bewijs met volledige inductie dat f_n injectief is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(c) Neem aan dat f injectief is. Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

[Opmerking: U mag zonder bewijs gebruiken dat $f_m \circ f_n = f_{m+n}$ geldt voor elke $m, n \in \mathbb{N}$.]

Naam:

Vraag 3 Neem aan dat A en B niet-lege, begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren

$$A - B = \{x - y \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Bewijs dat

$$\inf(A - B) = \inf A - \sup B.$$

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van reëele getallen.

(b) Voor $k \in \mathbb{N}$ is de functie $f_k : [0,\infty[\to [0,\infty[$ gegeven door

$$f_k(x) = \frac{k+x}{kx+1}, \qquad x \geq 0.$$

Bewijs met behulp van de definitie van convergentie dat de rij $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent is voor elke $x > 0$.

Naam:

Vraag 5 In deze opgave zijn (a_n) en (b_n) twee reëele rijen.

(a) Neem aan dat (a_n) convergent is met limiet 0 en dat (b_n) een begrensde rij is. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

(b) Neem aan dat $a_n \geq 0$ en $b_n \geq 0$ voor elke $n \geq 2012$. Bewijs dat

$$\left[\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \vee \quad \liminf_{n\to\infty} b_n = 0\right]$$