Examen Complexe functies

16 januari 2020

1 Vraag 1

Duid het juiste antwoord aan. Er is er telkens slechts 1.

1. Als je twee complexe getallen uit het eerste kwadrant vermenigvuldigt dan bekom je een getal
   - uit het eerste kwadrant
   - uit het tweede kwadrant
   - waarvan je niet zeker kan weten in welk kwadrant het ligt
   - de drie antwoorden hierboven zijn fout
2. Hoeveel mogelijke waarden (in $\mathbb{C}$) heeft de uitdrukking i^i?
   - geen enkele
   - 1 waarde
   - meerdere waarden, waaronder reële getallen
   - meerdere waarden, geen enkele ervan reëel
3. Tot welk domein kan je de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : r \to \sqrt{r}$ (hier is $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$) maximaal analytisch uitbreiden?
   - tot heel $\mathbb{C}$
   - tot $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ maar niet $\mathbb{C}$
   - tot $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}^+$ maar niet $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
   - tot $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$ maar niet $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}^+$
4. Zij f, g functies met een pool van 3e orde, respectievelijk 2e orde in 0. Zij h=f/g. Dan geldt

- h heeft een pool van 1e orde in 0
- h heeft een singulariteit in 0, maar niet noodzakelijk geïsoleerd
- h heeft een geïsoleerde singulariteit, maar er is niet genoeg info om die te classificeren
- geen enkele van bovenstaande uitspraken is waar

5. Hoeveel oplossingen (gerekend met singulariteiten) (in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$) heeft de vergelijking
$$\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} = 0$$
   - geen enkele
   - 1
   - 2
   - 3
   - 4
   - meer dan vier

2 Vraag 2

Rangschik de volgende complexe getallen van kleinste modulus naar grootste modulus, duid ook gelijkheden aan.
$e^{i\pi}$, π^{ie}, π^e, ei

3 Vraag 3

Zij $a, b \in \mathbb{R}$, schrijf het getal $\frac{a+bi}{1+2i}$ in de vorm $x+iy$. Geef $x, y \in \mathbb{R}$ zo expliciet mogelijk.

4 Vraag 4

Bereken $I = \oint\limits_R f(z)\,\mathrm{d}z$ waarbij R een vierkant is, doorlopen in tegenwijzerzin, met hoekpunten $x, y = \pm 1$.Beargumenteer je antwoord bondig (gewoon om me te laten zien dat je het doorhebt.)

1. $f(z) = Re(z)$
2. $f(z) = 3$

3. $f(z) = ze^{1/z}$

4. $f(z) = \frac{1}{z^2-2}$

5. $f(z) = 2z^3 - i$

6. $f(z) = \sqrt{z}$ waarbij we de vertakking (branch) kiezen die gegeven wordt door $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ met $z = re^{i\theta}$ en $\theta \in [0, 2\pi[$.

7. $f(z) = \frac{1}{z\sin(z)}$

8. $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$

9. $f(z) = \frac{3z-1}{3z^2-1}$

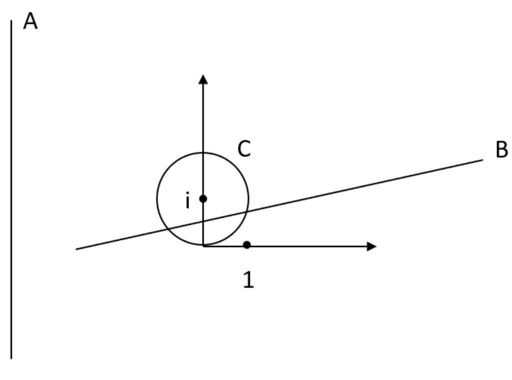
10. $f(z) = \frac{1}{(2z^2+3z-2)^2}$

5 Vraag 5

Geef *expliciet* en *eenduidig* een functie (dus een eenwaardige functie) f die een vertakking (branch) is van $\log(z+4)$ (dit betekent: $e^{f(z)} = z + 4$), die analytisch is in een omgeving van $z = -5$ en waarvoor $f(-5) = 7\pi i$. Geef ook het domein waarop de functie die je hebt gekozen analytisch is.

6 Vraag 6

Beschouw de conforme afbeelding $h : z \to \frac{1}{z-1}$. Schets zo nauwkeurig mogelijk de beelden $h(A), h(B), h(c)$ van de verzamelingen A, B, C in het beeldvlak.



Figuur 1: A en B zijn rechten en C is een cirkel met straal 1 en middelpunt i. De rechte A is evenwijdig met de imaginaire as.

7 Vraag 7

Bereken $I = \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^3}$ met behulp van residurekening. Je krijgt ook punten voor een duidelijke expliciete strategie waarbij enkel de berekening ontbreekt.