Differentiaalvergelijkingen

(12/01/2009 (9u-14u))

Theorie Van Assche

$\boxed{1}$ In mijn tuin leeft een populatie $x(t)$ van bladluizen en een populatie $y(t)$ van lieveheersbeestjes. Tesamen leven ze in een Lotka-Volterra model. Om van de bladluizen af te zijn, koop ik een insecticide die beide insecten doodt met dezelfde sterfteparameter c, die kleiner is dan de groeiparameter a van de bladluizen.

(a) Beschrijf deze situatie in differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$.

(b) Vergelijk de populatie bladluizen voor en na het spuiten van insecticide.

(c) Vergelijk de populatie lieveheersbeestjes voor en na het spuiten van insecticide.

(d) Wat als $c > a$?

$\boxed{2}$ Beschouw de volgende differentiaalvergelijking:

$$xy''(x) - y(x) = 0.$$

(a) Welk soort punt is $x = 0$?

(b) Geef een machtreeksoplossing rond $x = 0$.

(c) Leg uit hoe je aan een tweede oplossing, lineair onafhankelijk van die uit (b), geraakt.

(d) Bereken de eerste paar termen van deze tweede oplossing.

Theorie Fannes

$\boxed{1}$ Beschouw voor $a > 0$ de functie

$$f_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{2(1 - \cos(at))}{t}.$$

(a) Schets de grafiek van f_a.

(b) Bepaal de Laplacegetransformeerde van f_a.
(Aanwijzing: een mogelijke werkwijze is via differentiatie naar a.)

$\boxed{2}$ Voor complexe functies $f(r)$ die in bolcoördinaten enkel van de voerstraal afhangen wordt de Laplaciaan gegeven door

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}.$$

We definiëren voor zo'n functies de (niet-reguliere) Sturm-Liouville operator

$$L := -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr},$$

aangevuld met homogene Neumann randvoorwaarden. We beschouwen vanaf nu enkel de ruimte van functies $f : [0, R] \to \mathbb{C}$ die 2 keer continu differentieerbaar zijn en waarvoor geldt dat $f(R) = 0$.

(a) Welk scalair product wordt met L geassocieerd?

(b) Toon aan dat L symmetrisch is.

(c) Toon aan dat $\langle f, Lf \rangle \geq 0$.

(d) Toon aan dat 0 geen eigenwaarde is.

Oefeningen

$\boxed{1}$ Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y''(x) + y(x) = f(x) \tag{1}$$

waarbij $f(x)$ een stuksgewijs continue functie is.

(a) Toon aan dat de methode van scheiding van veranderlijken de oplossing

$$y_p(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t) dt$$

van (1) levert.

(b) Veronderstel dat

$$M := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

Bewijs dat alle oplossingen $y(x)$ van (1) begrensd zijn en vind een bovengrens voor

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |y(x)|$$

in functie van M, $y(0)$ en $y'(0)$.

$\boxed{2}$ We beschouwen het probleem van Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

waarbij $u(x, y)$ een functie is op $[0, L] \times [0, 1]$. De randvoorwaarden worden gegeven door

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \qquad & u(L, y) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \qquad & u(x, 1) &= f(x). \end{aligned}$$

(a) Toon aan dat elke oplossing kan geschreven worden in de vorm

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) Y_n(y),$$

waarbij $X_n(x)$ en $Y_n(y)$ functies zijn, en A_n een constante is. Bepaal ook een integraalvoorstelling van A_n.

(b) Neem aan dat

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bepaal in dit geval de coëfficiënten A_n expliciet. Toon verder aan dat

$$u(x, y) \to 0 \qquad \text{als } L \to \infty$$

waarbij $x > 0$ en $0 < y < 1$ vast gekozen worden.