Discrete Wiskunde

(28/06/2011 (13u-18u))

(1) Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehele getallen, die niet noodzakelijk verschillend zijn. Toon aan dat er opeenvolgende getallen $a_{k+1}, \ldots, a_\ell$ in de rij bestaan waarvan de som $\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i$ een veelvoud is van n.

(2) Op de tetraëder gaan we de volgende 20 punten kleuren:

- De vier toppen van de tetraëder.
- Op elk zijvlak het zwaartepunt.
- Op elk zijvlak de middens van elk lijnstuk met een hoekpunt en het zwaartepunt als randpunten.

(a) Op hoeveel manieren kunnen we deze 20 punten kleuren zodat er 3 rood, 7 groen en 10 blauw zijn?

(b) Op hoeveel manieren kunnen we deze 20 punten kleuren zodat alle toppen van de tetraëder rood zijn, en zodat er op elk zijvlak 2 groene en 2 blauwe punten zijn?

(3) **Definitie.** Een deelverzameling $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ van $\mathbb{Z}_v$ met k elementen noemen we een (v, k, λ)–verschillenverzameling als $2 \leq k < v$, $\lambda \in \mathbb{N}_0$ en er voor elk element d van $\mathbb{Z}_v \setminus \{0\}$ precies λ koppels (i, j) met $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ bestaan waarvoor geldt dat $d = d_i - d_j$.

(a) Veronderstel dat er een (v, k, λ)–verschillenverzameling bestaat. Toon aan dat

$$\lambda(v - 1) = k(k - 1).$$

(b) Veronderstel dat D een (v, k, λ)–verschillenverzameling is, en dat a en b twee verschillende elementen zijn van $\mathbb{Z}_v$. Toon aan dat $a + D \neq b + D$.

(c) Zij D een (v, k, λ)–verschillenverzameling. Toon aan dat $D, 1+D, \ldots, (v-1)+D$ de blokken zijn van een symmetrisch $2 - (v, k, \lambda)$–design.

(d) Gebruik het voorgaande om een symmetrisch $2-(11, 6, 3)$–design te construeren.

(4) Voor welke $\lambda \in \mathbb{Q}$ is

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k - \lambda}{k!}$$

te schrijven als een som van een eindig aantal hypergeometrische termen in n? Geef voor dergelijke λ deze schrijfwijze. Controleer je antwoord voor $n = 2, 3, 4$.

(5) (a) Bewijs de Plotkin–bovengrens.

(b) Verrassing.
Bijvragen: Wat is de link tussen de minimale afstand van een code C en het aantal fouten dat C kan verbeteren? Bij Massey–Omura staat dat voor elke $x \in \mathbb{F}_q$ geldt dat $x^{ed} = x$, waarbij $e, d \in \mathbb{Z}$ met $ed \equiv 1 \pmod{q-1}$; waarom?