Wiskundige methoden in de natuurkunde
Discrete symmetrieën
(22/01/2010)

$\boxed{1}$ Zij $\mathcal{G}$ een eindige commutatieve groep. Elke irreducibele representatie van $\mathcal{G}$ is ééndimensionaal en het aantal inequivalente irreps van $\mathcal{G}$ is gelijk aan de orde van $\mathcal{G}$.

(a) Toon aan dat $g \in \mathcal{G} \mapsto \mathsf{R}^1(g)\mathsf{R}^2(g)$ een irrep is indien R^1 en R^2 het zijn. Is dit een zinvolle uitspraak indien men niet te maken heeft met ééndimensionale representaties?

(b) Toon aan dat voor een irrep R elke $\mathsf{R}(g)$ een wortel van de eenheid is.

(c) Toon aan dat de irreps van $\mathcal{G}$ uitgerust met het product van hierboven zelf een groep vormen, de duale groep van $\mathcal{G}$ genoemd.

(d) De cyclische groep van orde d, C_d, is gegenereerd door een element g dat aan de relatie $g^d = e$ voldoet. Bepaal de irreps van C_d.

$\boxed{2}$ Stel dat U een unitaire representatie is van een eindige groep $\mathcal{G}$ op een eindigdimensionale complexe orthogonale vectorruimte $\mathcal{V}$.

(a) Toon aan dat

$$P := \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathsf{U}(g) \otimes \mathsf{U}(g)$$

een orthogonale projector is. Dit is een transformatie die voldoet aan

$$P = P^* = P^2.$$

(b) Het spoor van een orthogonale projector is gelijk aan de dimensie van de deelruimte waarop hij projecteert. Waarom?

(c) Bereken voor $\mathcal{G} = \mathcal{S}_3$ en U de irrep van $\mathcal{S}_3$ van dimensie 2, de dimensie van de deelruimte van $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ waarop P projecteert.