EXAMEN GETALTHEORIE MAANDAG 6 SEPTEMBER 2010

Prof. Jan Denef NAAM: .....

---

1. [*Theorie-vraag, mondeling te verdedigen.*]
   (a) Verklaar in detail de tweede zin op pagina 47 van de cursustekst: Dan heeft $ax^2 + pby^2 = z^2$ een oplossing $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{Z}_p^3 \setminus p\mathbf{Z}_p^3$.
   (b) Verklaar in detail de derde zin op pagina 62 van de cursustekst: Het is gemakkelijk om in te zien dat s en $\overline{s}$ niet geassocieerd zijn, want anders zou $\overline{s}/s = \pm 1$ of $\pm\, i$, wat onmogelijk is want $s = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{Z}$, en $x^2 + y^2 = p$.

2. Zij p een priemgetal. Stel dat $\mathbb{Z}_p^\times = S_1 \cup S_2$ als disjuncte unie van twee niet-lege verzamelingen en dat volgende eigenschappen gelden:
   (a) Het product van twee elementen uit S_i $(i = 1, 2)$ zit in S_1:
   $$\forall i : \forall a, b \in S_i : a \cdot b \in S_1.$$
   (b) Het product van een element uit de ene met een element uit de andere verzameling zit in S_2:
   $$\forall a \in S_1, \forall b \in S_2 : a \cdot b \in S_2.$$
   Toon aan dat S_1 precies de verzameling kwadraten in $\mathbb{Z}_p^\times$ is.

3. Bekijk de Taylorreeks van $-\log(1 - x)$:
   $$-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}.$$
   Toon aan dat het convergentiegebied van deze functie op $\mathbb{Q}_p$ precies $C := \{x \in \mathbb{Q}_p : \mathrm{ord}(x) > 0\}$ is.

4. Welke priemgetallen p zijn te schrijven als
   $$p = x^2 - 7y^2, \quad \text{met } x, y \in \mathbb{Q}?$$
   Geef voor de twee kleinste zulke priemgetallen p_1 en p_2 telkens een bijhorende oplossing (x_1, y_1) en (x_2, y_2).

5. Zij $p > 5$ een willekeurig priemgetal. Toon het volgende aan:
   (a) Als $p \equiv \pm 1 \bmod 5$, dan is 5 géén generator van $\mathbb{Z}_p^\times, \cdot$.
   (b) Als $p \equiv \pm 2 \bmod 5$ en p is van de vorm $2q + 1$ met q ook priem, dan is 5 wél generator van $\mathbb{Z}_p^\times, \cdot$.

Veel succes!