OEFENINGENEXAMEN ALGEBRA II
3 BA Wiskunde

19 januari 2009

Naam:

- Schrijf op elk blad je naam (ook onmiddellijk op dit opgaveblad).
- Als je een vraag blanco afgeeft, noteer dan op dit opgaveblad 'blanco' naast het nummer van de vraag.
- Geef voldoende uitleg. (Vermeld de stellingen en eigenschappen die je gebruikt, argumenteer elke niet-triviale stap, geef uitleg bij je berekeningen, verzorg je taal en let op de juiste bindwoorden, ...)
- Enkel net afgeven. Antwoorden in volgorde leggen met opgaveblad bovenaan en samen nieten.

Veel succes!

---

1. (a) Deze vraag gaat over het bewijs van Stelling 4.3.1 in het deel Galoistheorie (pagina 26). Leg in detail uit waarom de afbeelding van $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ naar $\mathbf{S}_p$ injectief is.

   (b) Is de volgende bewering waar of vals? Motiveer in detail je antwoord.
   Zij k een veld. Voor elke aftelbare deelverzameling S van $k[x,y,z]$ bestaat er een eindige deelverzameling $B \subset S$ zodat het ideaal voortgebracht door B gelijk is aan het ideaal voortgebracht door S.

2. In deze vraag noteren we het complex getal $\sqrt[4]{2} + i$ met α.

   (a) Toon aan dat $i \in \mathbb{Q}(\alpha)$ (*Hint:* $(\alpha - i)^4 = 2$). Leid hieruit af dat $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

   (b) Wat is de uitbreidingsgraad van $\mathbb{Q}(\alpha)$ over $\mathbb{Q}$?

   (c) Toon aan dat $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ een Galoisuitbreiding is. Bestaat er een strikt deelveld F van $\mathbb{Q}(\alpha)$ dat niet Galois is over $\mathbb{Q}$?

   (d) Toon aan dat $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ niet commutatief is.

3. Zij K een veld van karakteristiek 0 en zij $f \in K[x]$ een irreducibele veelterm van graad n. Zij E een ontbindingsveld van f over K en zij $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de wortels van f in E.

   (a) Toon aan dat de velduitbreiding $K(\alpha_1) \supset K$ Galois is als en slechts als $E = K(\alpha_1)$.

   (b) Veronderstel dat $\mathrm{Gal}(E/K)$ commutatief is. Toon aan dat

   $$|\mathrm{Gal}(E/K)| = n.$$

4. Zij F een veld en I een ideaal in de polynomenring $F[x_1, \ldots, x_n]$. Veronderstel dat I wordt voortgebracht door *homogene* veeltermen $f_1, \ldots, f_s$.

   (a) Zij f een homogene polynoom. Veronderstel dat we f met het delingsalgoritme voor een bepaalde monomenordening delen door $f_1, \ldots, f_s$. We bekomen dan een schrijfwijze

   $$f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s + r.$$

   Toon aan dat $a_1, \ldots, a_s$ en r homogeen zijn (of 0).

   (b) Toon aan dat er voor elke monomenordening een Gröbnerbasis voor I bestaat die enkel homogene polynomen bevat.

   (c) Bestaat de unieke gereduceerde Gröbnerbasis van I voor elke monomenordening uit homogene polynomen? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.