

Examen Bewijzen en redeneren

K.U.Leuven

januari 2008

Elke vraag staat op tien punten met een gegeven onderverdeling voor elke vraag.

1. (a) Zoals gekend is $P(X)$ de machtsverzameling van X .
Een functie $f : P(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ noemen we een keuzefunctie als $\forall A \in P(X) \setminus \{\emptyset\} : f(A) \in A$.
 - Als $|x| = n$, hoeveel elementen heeft $P(X) \setminus \{\emptyset\}$?
 - Hoeveel keuzefuncties zijn er als $|X| = 3$?
- (b) Schrijf de bewering dat $f : X \rightarrow Y$ niet injectief is met behulp van kwantoren zonder de negatiekwantor te gebruiken. U mag wel $\neq$ gebruiken.
- (c) Is de volgende bewering over een willekeurige functie $f : X \rightarrow Y$ waar of niet? Bewijs.

$$[\forall x \in X : \exists B \in P(Y) : x \notin f^{-1}(B)] \Rightarrow [\exists B \in P(Y) : \forall x \in X : x \notin f^{-1}(B)]$$
- (d) Zijn de volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar? Licht uw antwoord toe. (Een formeel bewijs is niet gevraagd).
 - De verzameling van de rationale getallen.
 - De verzameling van alle deelverzamelingen van de natuurlijke getallen met ten hoogste 5 elementen.
 - De verzameling van alle eindige deelverzamelingen van de natuurlijke getallen.
2. Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie
 - (a) Bewijs dat $f(f^{-1}(B)) \subset B$ geldt voor alle $B \in P(Y)$.
 - (b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de gelijkheid in (a) niet hoeft te gelden.
 - (c) Bewijs dat $\forall B \in P(Y) : f(f^{-1}(B)) = B$ als en slechts als f surjectief is.
3. Zij X een verzameling. Zij R de relatie op $P(X)$ gegeven door $(A, B) \in R$ als en slechts als er een functie $f : X \rightarrow X$ is met $f(A) = B$.
 - (a) Is R reflexief, symmetrisch, transitief? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
 - (b) Bewijs dat R een equivalentierelatie is als en slechts als $|X| \leq 1$.
 - (c) Geef de equivalentieklassen in het geval van $X = \emptyset$ en in het geval $X = \{\emptyset\}$.
4. Zij $f : \mathbb{R}/\{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \frac{x+a}{x-a}$ met $a \in \mathbb{R}_0$ een gegeven reëel getal verschillend van nul. Bewijs met de $\epsilon - \delta$ definitie dat f continu is $x^* = 0$