

Examen Kansrekenen en Statistiek II

20 juni

1 Theorie

1.1 Ordestatistieken en spacings.

We beschouwen een steekproef uit de Uniforme verdeling op het interval $[0, 1]$. Hiervan beschouwen we de ordestatistieken Y_i en de variabelen Z_i gegeven door:

$$Z_1 = Y_1, \quad Z_i = Y_i - Y_{i-1} \text{ voor } 2 \leq i \leq n$$

1. Geef de domeinen van de stochastische vectoren $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ en $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$.
2. Bereken de verdeling van $\mathbf{Z}$.

1.2 Almost sure convergentie

1. Geef de definitie van 'almost sure' convergentie
2. Bewijs de volgende equivalentie:

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(\forall m \geq n : |X_m - X| \leq \epsilon) = 1$$

3. Gebruik makende van ofwel je antwoord op 1. of 2., bewijs dat:

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \text{ en } Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y \implies X_n + Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X + Y$$

1.3 Sufficiënte statistieken

1. Geef de definitie van een sufficiënte statistiek
2. De stelling van Fisher-Neyman begint als volgt: *Voor $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. s.v. met een discrete kansverdeling, geldt dat een statistiek T sufficiënt is voor een parameter θ als en slechts als ...*
Vul de stelling aan en bewijs.
Hint: er wordt iets gefactoriseerd

2 Oefeningen

2.1 Een MLE en alles wat gezegd kan worden over schatters

We beschouwen de s.v. X met verdelingsfunctie:

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{voor } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (1)$$

Met $\theta > 0$.

En we hebben een steekproef $X_1, \dots, X_n$ uit deze verdeling tot onze beschikking.

1. Bepaal een MLE $\hat{\theta}$ voor de parameter θ
2. Bepaal de verdeling van de s.v. $-\ln(X)$.
3. Bepaal de verdeling van de s.v. $\sum_{i=1}^n -\ln(X_i)$.
4. Bepaal de bias en de variantie van de MLE $\hat{\theta}$ uit 1.
Hint: Voor $Y \sim \Gamma(a, b)$ geldt: $E(\frac{1}{Y}) = \frac{b^{-1}}{a-1}$, en $Var(\frac{1}{Y}) = \frac{b^{-2}}{(a-1)^2(a-2)}$
5. Construeer een onvertekende schatter $\tilde{\theta}$ voor θ .
6. Bereken de variantie en de efficiëntie van deze schatter $\tilde{\theta}$.
7. Is $\tilde{\theta}$ zwak consistent?

2.2 Meer schatters en wat R-code

We beschouwen een s.v. X met verdeling:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(x-\theta)^a} & \text{voor } \theta + 1 < x \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (2)$$

Beantwoord volgende vragen aan de hand van de bijgevoegde R-code:

1. Hoe genereert men steekproeven uit deze verdeling en waarom werkt dit?
 2. Welke parameter wordt er geschat en welke schatter wordt er gebruikt?
 3. Wat illustreert Figuur ?? over T als schatter voor θ ?
 4. Wat kan je afleiden uit Figuur ?? en het tweede deel van de R-code in verband met de verdeling van de schatter $T_2 = T^{n-1} + 1$?
- (R-code en figuren nog toe te voegen)