Examen Kansrekenen en statistiek 2

20 juni 2017

1 Theorie

1. Gegeven is de gezamenlijke dichtheidsfunctie van een bivariaat normaal verdeeld stochastisch koppel (X, Y). (met 5 parameters)
   (a) Geef de definitie van de voorwaardelijke dichtheid van Y gegeven $X = x$ en bereken deze.
   (b) Geef de definitie van de voorwaardelijke verwachting van Y gegeven $X = x$ en bereken deze.
   (c) Leid af wanneer X en Y onafhankelijk zijn.
2. (a) Beschouw een rij deelverzamelingen E_n van Ω en definieer $\limsup E_n$, $\liminf E_n$ en $\{E_n i.o.\}$.
   (b) Toon aan dat voor een rij stochastische veranderlijken
   $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : P\{|X_n| > \varepsilon i.o.\} = 0$
3. (a) De scorefunctie van een reële stochastische variabele X wordt gegeven door $S(X;\theta) = grad_\theta ln f(X;\theta)$. Toon aan dat $E_\theta(S) = 0$ en geef voorwaarden waaronder dit geldt.
   (b) Wat is de scorefunctie van een steekproef van omvang n uit X, $S_n(X_1, \ldots, X_n)$? Geef de uitdrukkingen voor $E_\theta(S_n)$ en $Var_\theta(S_n)$ en toon ze aan.

2 Oefeningen

1. Zij $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke reële s.v. met dichtheid $f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\theta\pi}} e^{-\frac{ln(x)^2}{2\theta}}$ met $0 < x$ en $0 < \theta < \infty$.
   (a) Bereken $\hat{\theta_{MLE}}$ voor de parameter θ.
   (b) Geef de verdeling van $ln(X)$.
   (c) Toon aan dat $\frac{ln(X)^2}{\theta}$ een $\chi^2(1)$ verdeling volgt.
   (d) Bereken de MSE van $\hat{\theta_{MLE}}$.
   (e) Geef de Fisher informatie voor dit model en bespreek de efficiëntie.
   (f) De modus van een verdeling is het punt waarin de dichtheid maximaal is. Bepaal de modus en een MLE voor de modus van de verdeling van X.
   (g) Bepaal de asymptotische verdelingen van de MLE voor θ en de MLE voor Modus(X).
2. Zij $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$ en definieer een rij $s.v.$ voor $j = 2, \ldots$ door

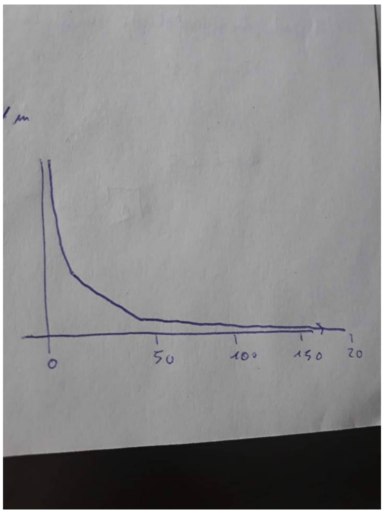
$$Y_j = \begin{cases} j^2 \text{ als } 0 \leq X \leq \frac{1}{j^2} \\ j \text{ als } \frac{1}{j^2} \leq X \leq \frac{1}{j} \\ 0 \text{ elders} \end{cases}$$

   Met de volgende code worden er steekproeven uit deze rij gegenereerd.

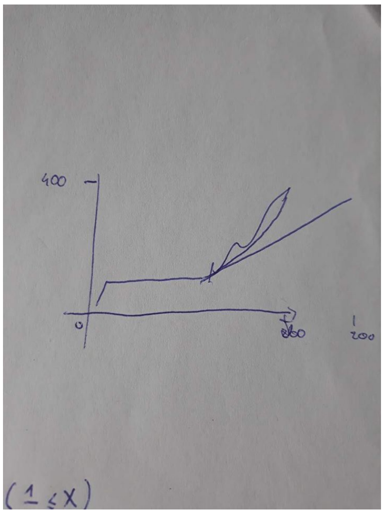
```
genYj = function(j){
  randgetal = runif(1)
  if (randgetal <= 1/j^2){
    Yj = j^2
  } else of (1/j)^2 && randgetal <= 1/j{
    Yj = j
  } else {
    Yj = 0
  }
    return(Yj)
}
```

Het limietgedrag van deze rij wordt bestudeerd. De volgende R-code en output illustreren 2 gedragingen van deze limiet aan de hand van steekproeven uit Y_j van grootte m. Leg uit wat er wordt geïllustreerd en toon (kort) analytisch aan.

(a)
```
m = 500
jwaarden = c(2,5,10,50,100,200)
epsilon = 0.05
for (i in 1:length(jwaarden)){
  jwaarde = jwaarden[i]
  date = replicate(m,genYj(jwaarde))
  result[i] = length(which(abs(data-0)> epsilon))/m
}
plot(jwaarden,result,type="l",xlab = "j")
```



(b)
```
m = 500
jwaarden = c(2,5,10,50,100,200)
epsilon = 0.05
result = rep(0,length(jwaarden)){
  jwaarde = jwaarden[i]
  date = replicate(m,genYj(jwaarde))
  result[i] = mean(abs(data-0)^2)
}
plot(jwaarden,result,type="l",xlab="j")
```


400
0
1
200
(1 ≤ X)