Kansrekenen

(12/06/2009 (13u30-17u30))

Theorie

$\boxed{1}$ (a) Bewijs dat

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{D} X.$$

(b) Bewijs dat

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X \implies X_n \xrightarrow{P} X.$$

Toon ook aan dat als $X_n \xrightarrow{P} X$ en als $|X_n| \leq Y$ b.o., voor alle $n \in \mathbb{N}$, met Y zodanig dat $E|Y|^p < \infty$, dan geldt dat $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$.

(c) Bewijs dat het omgekeerde van (a) niet altijd geldt door een tegenvoorbeeld te geven. In welk speciaal gevaal geldt er wél dat $X_n \xrightarrow{P} X \iff X_n \xrightarrow{D} X$?

$\boxed{2}$ We gooien enkele keren met een eerlijke dobbelsteen en noteren met X_i het aantal ogen bij de i-de worp.

(a) Noteer $M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Ga de convergentie in kans na van M_n als $n \to \infty$.

(b) Definieer $G_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Ga de convergentie in kans, de bijna zeker convergentie en de convergentie in eerste orde gemiddelde ($\mathcal{L}^1$) van G_n na voor $n \to \infty$.

$\boxed{3}$ Beschouw twee rijen X_n en Y_n van stochastische veranderlijken zodat $X_n \xrightarrow{P} X$ en $Y_n \xrightarrow{P} Y$. Bewijs dat $X_nY_n \xrightarrow{P} XY$.

$\boxed{4}$ (a) Zij X, Y continue stochastische veranderlijken met gezamelijke dichtheid $f_{X,Y}(x, y)$.

(i) Hoe ga je te werk om de verdeling van $X - Y$ te berekenen?

(ii) Stel dat X een uniforme verdeling op $(0, 2)$ heeft en Y een uniforme verdeling op $(-2, 0)$. Veronderstel dat X en Y onafhankelijk zijn. Bepaal de verdeling van $U = X - Y$ en bereken $E(X(X - 4Y))$.

(b) Stel $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ allen dezelfde verdeling hebben, namelijk een χ^2-verdeling met m vrijheidsgraden. Wat is de verdeling van $\sum_{j=1}^n Y_j$? Waar kan je deze verdeling het beste mee benaderen als $n \to \infty$? Verklaar je antwoord.

Oefeningen

$\boxed{1}$ Beschouw een vaas met 5 witte en 10 rode ballen. We trekken hier N ballen uit, waarbij N het aantal ogen is dat we met een eerlijke dobbelsteen gegooid hebben.

(a) Wat is de kans dat alle getrokken ballen wit zijn?

(b) Wat is de kans dat we 3 ballen getrokken hebben, als gegeven is dat alle ballen wit zijn?

(c) Iemand stelt je het volgend spelletje voor: om mee te spelen zet je 100 euro in. Als alle getrokken ballen wit zijn, krijg je 1000 euro, anders krijg je niets terug. Is het voordelig om mee te doen aan dit spelletje?

$\boxed{2}$ Beschouw twee stochastische veranderlijken X, Y met gezamelijke dichtheid

$$f_{X,Y}(x,y) = 60x^2y$$

in de driehoek bepaald door de punten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$, en 0 erbuiten.

(a) Zijn X en Y onafhankelijk?

(b) Definieer

$$U = \begin{cases} X^2 & \text{als } X \leq 1/2 \\ 2Y & \text{als } X > 1/2 \end{cases}$$

Bepaal $P(U \geq Y)$.

(c) Bepaal $P(Y|X = t)$ en $P(U|X = t)$.

(d) Geef aan hoe je $E(U)$ zou berekenen. Je hoeft het niet helemaal uit te rekenen.

$\boxed{3}$ Beschouw de functie gegeven door $\varphi(t) = \dfrac{1}{2e^{-it} - 1}$.

(a) Zij X een stochastische veranderlijke met karakteristieke functie $\phi(\cdot)$. Bepaal het gemiddelde en de variantie van X.

(b) Stel dat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ allen dezelfde verdeling hebben als X en onderling onafhankelijk zijn. Definieer $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.

(i) Ga de convergentie in verdeling na van

$$\frac{n}{2}\left(\overline{X_n} - 2\right)^2$$

en bepaal de limietverdeling.

(ii) Ga de convergentie in verdeling na van

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n}^2}{2} - 2\right)$$

en bepaal de limietverdeling.