Examen Kansrekenen en Statistiek II
24/06/2019

Deel 1: Theorie

Vraag 1

Gegeven is dat voor alle $a < b, a, b \in \mathbb{R}$, continuïteitspunten van F_x geldt dat

$$P\{a < X < b\} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_x(t) dt \tag{1}$$

zonder bewijs.

a) bewijs, gebruikmakende van bovenstaande formule dat indien $\int \mid \varphi_x(t) \mid < +\infty$, dan is X een continue s.v. met dichtheidsfunctie

$$f_x(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_x(t) dt \tag{2}$$

b) Stel X en Y twee s.v. met respectievelijke verdelingsfuncties F_x en F_y, en respectievelijke karakteristieke functies φ_x en φy. Bewijs dat volgende equivalentie geldt:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_x(t) = \varphi_y(t) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : F_x(x) = F_y(x) \tag{3}$$

Vraag 2

Zij X_1,....,X_n een steekproef uit X, met dichtheidsfunctie $f_x(x)$ zodanig dat $f_x(x) > 0$ op het interval $]a, b[$ en nul daarbuiten, definieer de gezamelijke dichtheidsfunctie van de bijbehorende ordestatistieken $X_{(1)}$,...,$X_{(n)}$ en bewijs je antwoord.

Vraag 3

Bewijs dat als T_n een asymptotische normaal verdeelde schatter is voor parameter θ: $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathrm{D}} N(0; \sigma^2(\theta))$
Als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g(x)$ een functie is, die differentieerbaar is op $x = \theta$ dan geldt: $\sqrt{n}(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathrm{D}} N(0; (g'(\theta))^2\sigma^2(\theta))$.

Deel 2: Oefeningen

Vraag 1

Beschouw volgende dichtheidsfunctie: $\begin{cases} \theta\omega e^{\theta+\omega x-\theta e^{\omega x}} & als \text{ x} > 0 \\ 0 & als \text{ x} \leq 0 \end{cases}$
waarbij $\theta > 0$ een ongekende waarde heeft en $\omega > 0$ een gekende waarde heeft.

1) Toon aan dat $Y = e^{\omega x} - 1$ exponentieel verdeeld is
2) Toon aan dat $n\overline{Y} \sim \gamma(n, \frac{1}{\theta})$
3) Toon aan dat $\hat{\theta_{MLE}} = \frac{1}{\overline{Y}}$ met gegeven dat $Y_i = e^{\omega x_i} - 1$
4) Gebruik de delta methode om aan te tonen dat $\sqrt{n}(\hat{\theta_{MLE}} - \theta) \xrightarrow{\text{D}} N(0; \theta^2)$
5) Toon aan dat $\hat{\theta_{MLE}}$ zwak consistent is.
6) Bereken de bias van $\hat{\theta_{MLE}}$ en gebruik deze om een onvertekende schatter te bepalen (noem deze $\hat{\theta^*}$)
7) Bereken de efficiëntie van $\hat{\theta^*}$

Vraag 2

Gegeven was een R-code, die ik niet kan reproduceren.
En bijhorende informatie:

Zij $X_1, ..., X_n$ steekproeven met dichtheidsfunctie $\begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & als 0 < x < \theta \\ 0 & elders \end{cases}$
$T_n = X_{(n)}$ is een schatter voor $\theta = 3$

1) Wat illustreert de R-code, Toon analytisch aan
2) Hoe genereert men de steekproeven in dit experiment
3) Gelden ook sterkere vormen van consistentie, bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor 2 sterkere convergentievormen

Opmerking: Je kan deelvragen 1 en 3 oplossen als je weet dat de R-code illustreerde dat $T_n \xrightarrow{\text{P}} \theta$ met $\theta = 3$.