Vraag 1

a) Neen. Bv neem 2 energie-eigentoestanden met verschillende energie $E_1 \neq E_2$.

$$\Psi_{E_1} = \exp[-\frac{E_1 t}{\hbar}] \varphi_{E_1}$$

$$\Psi_{E_2} = \exp[-\frac{E_2 t}{\hbar}] \varphi_{E_2}$$

Dan is $\Psi_{E_1} + \Psi_{E_2}$ een oplossing van

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi$$

Maar NIET van $H\Psi = E\Psi$

b) Neem Ψ_0 de oplossing voor $C=0$, dan is de oplossing voor $C \neq 0$: $\Psi_0 \exp(-\frac{iCt}{\hbar})$

Het verschil is een faze factor en dus niet fysisch.

c). Dimensie is 2^N. De basisvectoren zijn immers van de vorm

$|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \ldots |\downarrow\rangle_k \ldots |\uparrow\rangle_N$ met op elke positie de keuze tussen $\uparrow$ of $\downarrow$.

d) Pauli-Principe: geen 2 deeltjes mogen in zelfde quantumtoestand zitten. De toestanden zijn $\uparrow$ of $\downarrow$. dus maar 2 opties. Dus

$N=1$: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$: dim $= 2$.

$N=2$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right)$: dim $= 1$.

$N>2$ $\Rightarrow$ geen toestanden : dim $= 0$

e) $N=1$: $S = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$N=2$: $S = 0$ (alleen spin 0)

Vraag 2.

$$E\Psi = H\Psi \quad , \quad E = +i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad H = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad \vec{p} = -i\hbar\vec{\partial}$$

$$E \to E - q\phi$$

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$$

Dit geeft vgl 11.17 in boek. We schrijven dit als.

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right]\Psi = (\vec{p} - q\vec{A})^2\Psi. \quad (*)$$

ijk transfo $\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}' + \vec{\nabla}\chi \\ \phi \to \phi' - \frac{\partial}{\partial t}\chi \\ \Psi \to \Psi' \exp\left[\frac{iq\chi}{\hbar}\right] \end{cases}$

Claim: $(*)$ is ijk invariant.

Bewijs:

① Linkerlid is ijkinvariant op exp na:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi'\right]\Psi' = \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi + q\frac{\partial}{\partial t}\chi\right]e^{\frac{-iq\chi}{\hbar}}\Psi.$$

$$= e^{-iq\chi/\hbar}\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi - q\cancel{\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)\Psi} + q\cancel{\left(\frac{\partial}{\partial t}\chi\right)\Psi} - q\phi\Psi\right\}$$

$$= e^{-iq\chi/\hbar}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right]\Psi.$$

② Rechterlid is ook inv. op exp na:

$$[-i\hbar\vec{\partial} - q\vec{A}']^2 \psi' =$$

$$[-i\hbar\vec{\partial} - q\vec{A}'][-i\hbar\vec{\partial} - q\vec{A} - q\vec{\partial}x](e^{iqx/\hbar}\psi) =$$

$$[\quad][+q(\vec{\partial}x)e^{iqx/\hbar}\psi - (q\vec{A} + q\vec{\partial}x)e^{iqx/\hbar} - i\hbar e^{iqx/\hbar}\vec{\partial}\psi] =$$

$$[\quad] e^{iqx/\hbar}[-i\hbar\vec{\partial} - q\vec{A}]\psi.$$

exact dezelfde berekenig geeft :

$$e^{iqx/\hbar}[-i\hbar\vec{\partial} - q\vec{A}]^2\psi.$$

→ dus LL en RL zijn gelijk.

Vraag 3

a). $E=0$: $H = \begin{pmatrix} V_0 & & \\ & V_0 & \\ & & 2V_0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Spectrum $H = \{V_0, 2V_0\}$

2x ontaard.

Eigenvectoren V_0: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenvector $2V_0$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b). Spectrum H: $E_1 = V_0(1-\epsilon)$

$$E_{2,3} = ? \rightarrow \det\begin{pmatrix} V_0-\lambda & V_0\epsilon \\ V_0\epsilon & 2V_0-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

$$(V_0-\lambda)(2V_0-\lambda) - (V_0\epsilon)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda V_0 - (V_0\epsilon)^2 + 2V_0^2$$

$$\lambda_\pm = \frac{3V_0 \pm \sqrt{9V_0^2 - 4(2V_0^2 - V_0^2\epsilon^2)}}{2}$$

$$= \frac{3V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + 4V_0^2\epsilon^2}}{2}$$

$$= V_0\left\{\frac{3 \pm \sqrt{1+4\epsilon^2}}{2}\right\}$$

Taylor expanderen tot op 2de orde.

$E_1 = V_0 - \epsilon V_0$

$E_2 = \lambda_- = [1 - \epsilon^2]V_0$

$E_3 = \lambda_+ = [2 + \epsilon^2]V_0 \leftarrow$ consistent

c). niet ontaarde toestand is ψ_{E_3}.

$$\psi_{E_3}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{(0)} = 2V_0.$$

$$E_3^{(1)} = \langle \psi_{E_3}^{(0)} | H' | \psi_{E_3}^{(0)} \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -V_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_0 \\ 0 & V_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$E_3^{(2)} = \sum_{k \neq 3} \frac{H'_{3k} H'_{3k}}{E_3^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$= \frac{(H'_{31})^2}{E_3^0 - E_1^0} + \frac{(H'_{32})^2}{E_3^0 - E_2^0} = 0 + \frac{V_0^2}{2V_0 - V_0} = V_0$$

$\rightarrow$ consistent!

d) <u>Ontaarde storingsberekening!</u>

$\rightsquigarrow$ los seculiere vgl. op:

$$\det\left[H'|_{\text{ontaard stuk}} - E^{(1)} \mathbb{1} \right] = 0.$$

$$H'|_{\text{ontaard stuk}} = \begin{pmatrix} -V_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dus $E^{(1)} = \begin{cases} -V_0 \\ 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ <u>ok consistent.</u>