

Examen Kwantummechanica

1 Vraag 1 Theorie: exchange interactie

Bespreek de exchange interactie. Dit wil dus zeggen dat je voor de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand de functies expliciet uitschrijft. Daarna toon je aan dat als de spin van één elektron omklapt, dit energie kan kosten (bespreek dit kwalitatief, zoals in de nota's staat). Bij deze eerste twee vragen negeer je de interactie tussen de twee elektronen. Nu neem je deze interactie mee als storing. Bespreek kwalitatief wat het effect hiervan is op de eerste aangeslagen toestand.

2 Vraag 2 Oefening

Dit was een redelijk lange vraag die ik hier zo goed mogelijk probeer op te schrijven, hopelijk lukt het ook :)

Gegeven was eerst de Hamiltoniaan voor een SHO in functie van de ladderoperatoren a en $a^\dagger$:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger)$$

waarbij a en $a^\dagger$ voldoen aan de volgende relaties: $[a, a^\dagger] = 1$, $[a, a] = 0$, $[a^\dagger, a^\dagger] = 0$. Beschouw nu een soortgelijk systeem dat gedefinieerd wordt als volgt:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(b^\dagger b + bb^\dagger)$$

waarbij b en $b^\dagger$ voldoen aan de volgende relaties: $\{b, b^\dagger\} = 1$, $\{b, b\} = 0$, $\{b^\dagger, b^\dagger\} = 0$. Hierbij geldt dat $\{A, B\} = AB + BA$.

Gegeven was dat de nieuw gedefinieerde Hamiltoniaan de vergelijking van de SHO was voor fermionen in plaats van bosonen.

1. Zij $N_F = b^\dagger b$ de zogenaamde aantal-operator. Toon aan dat $N_F \cdot (N_F - 1) = 0$ en dus dat enkel 0 en 1 eigenwaarden zijn van N_F (tip: toon aan dat $N_F^2 = N_F$).
2. Zij $|0\rangle$ de eigenvector bij 0 en $|1\rangle$ de eigenvector bij eigenwaarde 1. Toon aan dat:
$$b^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad b^\dagger|1\rangle = 0 \quad b|0\rangle = 0 \quad b|1\rangle = |0\rangle$$
3. Toon aan dat $H|0\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle$ en $H|1\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|1\rangle$
4. We beschouwen nu het systeem met meerdere deeltjes. De Hamiltoniaan voor de SHO van bosonen en fermionen ziet er dan respectievelijk zo uit:

$$H_B = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar\omega}{2}(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, [a_i, a_j] = 0, [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$
$$H_F = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar\omega}{2}(b_i^\dagger b_i + b_i b_i^\dagger) \quad \{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \{b_i, b_j\} = 0, \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = 0$$

Een eigentoestand van deze Hamiltoniaan wordt dan gegeven door $|n_1, n_2, \dots\rangle$ zodat bijvoorbeeld: $a_2^\dagger|0, 0, 0, \dots, 0\rangle = |0, 1, 0, 0, \dots, 0\rangle$

Noteer met $|vac\rangle = |0, 0, 0, \dots, 0\rangle$. Gegeven is nu de formule:

$$a_i^\dagger a_j^\dagger |vac\rangle = a_i^\dagger a_j^\dagger |vac\rangle$$

en

$$b_i^\dagger b_j^\dagger |vac\rangle = -b_i^\dagger b_j^\dagger |vac\rangle$$

Toon aan dat deze formules consistent zijn met de (anti-)commutatierregels. Toon daarna aan dat voor een eigentoestand bij de fermionen $n_i \in \{0, 1\}$ en dat voor een eigentoestand bij de bosonen $n \in \mathbb{N}$ (tip stel $i = j$ in die laatste formules).

TIP van yours thrully: geen idee waarom die laatste tip erbij stond, het bewijs dat ik zo kreeg was ronduit zwak. Dus ik heb de gegeven formules niet gebruikt.