# Examen Lineaire Algebra

2e Bachelor Informatica

January 19, 2009

1. Zij $V$ en $W$ eindigdimensionale vectorruimten en $\mathcal{A} : V \to W$ een lineaire afbeelding. Formuleer en bewijs de dimensiestelling voor $\mathcal{A}$.

2. Zij $V$ een eindigdimensionale inproductruimte.

   **(a)** Geef en bewijs het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt dat uit een gewone basis van $V$ een orthonormale basis van $V$ construeert.

   **(b)** Zij $e_1, ..., e_n$ een orthonormale basis van $V$ en $v, w \in V$. Beschrijf het inproduct $\langle v, w\rangle$ in termen van coördinaten van $v$ en $w$ ten opzichte van $e_1, ..., e_n$.

3. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ de verzameling
   $H := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 0, \sum_{i=1}^{3} b_i x_i = 0\}$,
   met $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ voor elke $i$.

   **(a)** Toon aan dat $H$ een lineaire deelverzameling is van $\mathbb{R}^3$.

   **(b)** Toon aan dat $dimH$ strikt positief is.

   **(c)** Bepaal concrete waarden voor $a_i$ en $b_i$ zodat $dimH = 1$.

4. Zij $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een transformatie van een vlak die elk punt loodrecht spiegelt ten opzichte van een recht $y = ax + b$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

   **(a)** Ga na voor welke waarden van $a$ en $b$ de afbeelding $\mathcal{A}$ lineair is.

   **(b)** Bepaal voor die waarden de eigenwaarden en bijhorende eigenruimten van $\mathcal{A}$.

5. Beschouw de lineaire afbeelding $\mathcal{A}_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
   $(x, y, z) \mapsto (ax + z, x + (1 - a)y + az, (2a - 1)x + (1 - a^2)y + a^2 z)$
   Bespreek $dim\mathcal{A}_a$ in functie van de parameter $a \in \mathbb{R}$

6. Zij $V$, $W$ en $U$ eindigdimensionale vectorruimten en zij $f : V \to W$ en $g : W \to U$ lineaire afbeeldingen.

   **(a)** Toon aan dat
   $dimIm_{(g \circ f)} \geq dimIm_g + dimIm_f - dimW$
   (Mogelijke tip: beschrijf de beperking van $g$ tot $f$ ten opzichte van het beeld van $f$.)

   **(b)** Stel nu dat $V = W = U$ en $g = f$. Construeer in dit geval een voorbeeld waarbij voorgaande ongelijkheid strikt is.

7. Zijn de volgende uitspraken waar of niet? Bespreek.

   **(a)** Neem $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Elke bovendriehoeksmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ is diagonaliseerbaar.

   **(b)** Neem $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ en $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een injectieve lineaire afbeelding. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een inverteerbare matrix. Dan bestaat voor elke basis $\mathcal{V}$ van $\mathbb{R}^n$ een basis $\mathcal{W}$ van $\mathbb{R}^n$ zodat de matrix $M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{L})$ $(= \mathcal{L}_{\mathcal{V},\mathcal{W}})$ van $\mathcal{L}$ ten opzichte van basissen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ gegeven wordt door $A$.