Katholieke
Universiteit
Leuven

EXAMEN MEETKUNDE 2

2 juni 2021

Dit examen moest in drie uur afgelegd worden en was volledig schriftelijk.

1 Vraag 1

Zij $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ twee homogene functies van graad respectievelijk d_1, d_2 met $d_2 > d_1 > 0$. Zij $X \in \mathbb{R}P^2$ een enkelvoudig punt van $V(f_1)$ en bovendien ook in $V(f_2)$ (voor f_2 is dus niet gegeven dat het ook enkelvoudig is, enkel dat het erin zit). Bespreek in elk van volgende gevallen de multipliciteit van X en de hoofdraaklijnen van X in vergelijking met de hoofdraaklijnen van X in $V(f_1)$ en $V(f_2)$.

1. $V(f_1 f_2)$
2. $V(f_1^{d_2} + f_2^{d_1})$

2 Vraag 2

Gegeven is de kromme $\mathcal{C} \leftrightarrow (x-1)(x^2+y^2) = ax^2$ in $\mathbb{E}^2$ met $a \in \mathbb{R}$.

1. Toon aan dat $\mathcal{C}$ juist één meervoudig punt heeft dat onafhankelijk is van a, maar dat het aantal raaklijnen in dat punt wel afhankelijk is van a.
2. Bereken de unieke asymptoot van $\mathcal{C}$.
3. Teken $\mathcal{C}$ in elk van de volgende vijf gevallen: $a = 0$, $a = -1$, $a < -1$, $-1 < a < 0$, $a > 0$.
4. Geef een rationale parametrisatie van $\mathcal{C}$.

3 Vraag 3

Gegeven is een booglengtegeparametriseerde kromme $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ in een oppervlak M. Zij N een normaal vectorveld op M.

1. Toon aan dat er twee functies $\kappa_1 : I \to \mathbb{R}$ en $\kappa_2 : I \to \mathbb{R}$ bestaan zodat geldt
$$\beta = \kappa_1(N \circ \beta) + \kappa_2 \beta'$$
Toon ook aan dat $\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$ waarbij κ de kromming van β is.
2. Met welk begrip uit de cursus komt κ_1 overeen? Leg uit.
3. Met welk begrip uit de cursus komt κ_2 overeen? Leg uit.

4 Vraag 4

Gegeven de patch $x : U \times V \to \mathbb{E}^3 : (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))$. Als we de voorwaarde bekijken om dit een minimaal oppervlak te laten zijn, krijgen we in het algemeen geen gewone differentiaalvergelijking. Als er echter een functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat zodat $f(u,v) = g(u^2+v^2)$ dan kan dit wel.

1. Stel de gewone differentiaalvergelijking op zodat het oppervlak gegeven door bovenstaande patch minimaal is.
2. Toon aan dat $g_1 \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 1$ en $g_2 : (1, \infty) \to \mathbb{R} : t \mapsto \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})$ voldoen. Geef ook aan wat voor oppervlak deze functies geven.