Meetkunde II

(24/06/2009)

Mondeling gedeelte

$\boxed{1}$ Beschouw de verzameling V van rechten in $\mathbb{R}P^3$. We zullen een afbeelding $\phi : V \to \mathbb{R}P^5$ construeren. Neem twee verschillende punten $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ en $Y = [(y_0, y_1, y_2, y_3)]$ op een rechte l. Definieer

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}, \qquad i, j \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

We definiëren nu

$$\phi(l) = [(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})]$$

(a) Bewijs dat ϕ goed gedefinieerd is.

(b) Bewijs dat ϕ injectief is.

(c) Toon aan dat het beeld van V onder ϕ ligt in de *hyperkwadriek van Klein*

$$\mathcal{H} = \{[(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)] \mid x_0x_3 + x_1x_4 + x_2x_5 = 0\}.$$

(d) Toon aan dat ϕ een bijectie tussen V en $\mathcal{H}$ induceert.

$\boxed{2}$ Beschouw de vectorruimte V van homogene veeltermen van graad twee, met complexe coëfficiënten en beschouw de geassocieerde projectieve ruimte $P = P(V)$. Met elke $[f] \in P$ kunnen we een kegelsnede $V(f)$ in $\mathbb{C}P^2$ laten overeenkomen. Zij L een rechte in P. We noemen

$$\Sigma = \{V(f) \mid [f] \in L\}$$

een *bundel kegelsneden.*

Zij P_1, P_2, P_3 en P_4 punten in $\mathbb{C}P^2$ zodat geen drie collineair zijn.

(a) Bewijs dat de kegelsneden door deze vier punten een bundel kegelsneden vormen.

(b) Toon aan dat er door een vijfde punt $P \notin \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ precies één kegelsnede uit deze bundel gaat.

$\boxed{3}$ Beschouw een niet-ontaarde vierdegraadskromme $\mathcal{C}$ in $\mathbb{C}P^2$ met drie dubbelpunten.

(a) Toon aan dat de drie dubbelpunten niet collineair zijn.

(b) Bewijs dat er een bijectie is tussen (de punten van) $\mathcal{C}$ en (de kegelsneden uit) de bundel kegelsneden bepaald door de drie dubbelpunten en een willekeurig vierde punt, op een eindig aantal uitzonderingen na.

Schriftelijk gedeelte

$\boxed{1}$ Maak gebruik van opgaven 2 en 3 van het mondeling gedeelte om aan te tonen dat de algebraïsche kromme $V\left((x_1^2+x_2^2)^2-(x_1^2-x_2^2)x_0^2\right)$ een rationale kromme is. (Hint: denk Euclidisch en gebruik een bundel cirkels door de oorsprong en, bijvoorbeeld, $[(1,1,0)]$.)

$\boxed{2}$ Vind een projectieve transformatie $\sigma : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ zodat $\sigma([(1,0)]) = [(i,1)]$, $\sigma([(1,i)]) = [(0,1)]$ en $\sigma([(1,1)]) = [(1,-1)]$. Toon aan dat $\sigma^2 = I$.

$\boxed{3}$ Zij M^2 een oppervlak in $\mathbb{E}^3$. Zij $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ een booglengtegeparamatriseerde kromme op M^2 met kromming $\kappa > 0$ en torsie τ. Noteer met ξ de eenheidsnormaal op M^2 en zij S de vormoperator die bij M^2 hoort.

(a) Bewijs dat $S(\alpha'(s)) \cdot \alpha'(s) = \xi(\alpha(s)) \cdot \alpha''(s)$.

(b) We noemen α een asymptotische kromme als $S(\alpha'(s)) \cdot \alpha'(s) = 0$ voor alle $s \in I$. Bewijs dat de binormaal van een asymptotische kromme loodrecht staat op M^2 en dat $S(\alpha'(s)) = \pm\tau N(s)$, waarbij N het hoofdnormaalveld van van α is.

(c) Toon aan dat de Gausskromming K van M^2 volgens een asymptotische kromme gelijk is aan $-\tau^2$.