

MODULEN EN HOMOLOGISCHE ALGEBRA

(18/01/2011)

THEORIE

- 1 Beantwoord vragen over het bewijs van de structuur van een endomorfisme over een eindig-dimensionale vectorruimte.
- 2 Zij R een HID. Bewijs dat $\text{Ext}^n(B, C) = 0$ voor alle $n \geq 2$ en voor alle R -modulen B en C .
- 3 Waar of niet waar?
 - (a) Zij R een commutatieve ring en $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ een exacte rij van R -modulen. Dan is M_2 Noethers als en slechts als M_1 en M_3 Noethers zijn.
 - (b) Zij p en q verschillende priemgetallen, en M een eindig voortgebrachte $\mathbb{Z}$ -module zodat de torsiedeelmodule TM van M orde pq heeft. Dan is M isomorf met een $\mathbb{Z}$ -module van de vorm $\mathbb{Z}^n \oplus \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{q\mathbb{Z}}$.

OEFENINGEN

- 1 Zij R een commutatieve ring, I een ideaal van R en M een R -module. Zoals gewoonlijk noteren we met IM de R -module voortgebracht door $\{im \mid i \in I, m \in M\}$.
 - (a) Bewijs dat M/IM op natuurlijke wijze een R/I -module is.
 - (b) Stel nu dat M een eindig voortgebrachte vrije R -module is, en neem een eindige basis $\{x_1, \dots, x_n\}$. (Deze bestaat, zoals we in de cursus gezien hebben.) Neem nu een maximaal ideaal I van R , dan is $F = R/I$ een veld en we kunnen M/IM dus beschouwen als F -vectorruimte. Bewijs dat de dimensie van M/IM als F -vectorruimte gelijk is aan n .
- Merk op dat dit bewijst dat elke basis van een eindig voortgebrachte vrije R -module (met R commutatief) hetzelfde aantal elementen heeft.
- 2 Zij $\mathcal{C}$ een categorie en beschouw de categorie $\mathcal{S}$ van de verzamelingen. Stel dat de functor $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ een links adjuncte. Bewijs dat G representeerbaar is. Voor de definitie van representeerbaarheid verwijzen we naar de oefeningenbundel.
 - 3 Zij R een commutatieve ring en beschouw het volgende commuterend diagramma van R -modulen, waarin de rijen exact zijn:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & \xrightarrow{g_{i-1}} & C_{i-1} & \xrightarrow{h_{i-1}} & A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i & \xrightarrow{g_i} & C_i & \xrightarrow{h_i} & A_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & \dots \\
 & & \downarrow \gamma_{i-1} & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma_i & & \downarrow \alpha_{i+1} & & \\
 \dots & \xrightarrow{g'_{i-1}} & C'_{i-1} & \xrightarrow{h'_{i-1}} & A'_i & \xrightarrow{f'_i} & B'_i & \xrightarrow{g'_i} & C'_i & \xrightarrow{h'_i} & A'_{i+1} & \xrightarrow{f'_{i+1}} & \dots
 \end{array}$$

Verder is ook gegeven dat elke γ_i een isomorfisme is. Definieer zelf op natuurlijke wijze R -modulenmorfismen

$$\begin{aligned}\varphi_i &: A_i \rightarrow A'_i \oplus B_i \\ \chi_i &: A'_i \oplus B_i \rightarrow B'_i \\ \psi_i &: B'_i \rightarrow A_{i+1}\end{aligned}$$

zodat we een complex

$$\cdots \xrightarrow{\chi_{i-1}} B'_{i-1} \xrightarrow{\psi_{i-1}} A_i \xrightarrow{\varphi_i} A'_i \oplus B_i \xrightarrow{\chi_i} B'_i \xrightarrow{\psi_i} A_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \cdots$$

krijgen. Bewijs dat dit een complex is en ga exactheid na in $A'_i \oplus B_i$ en B'_i .

- 4 Zij R een integriteitsdomein. Bewijs dat R een veld is als en slechts als elke projectieve R -module vrij is.