Bewijzen en Redeneren
Modeloplossingen Tussentijdse Toets 2011

Bart Bories

10 november 2011

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Geef de definitie van $f^{-1}(B)$ als $B \in P(Y)$.

(b) Bewijs dat
$$f(f^{-1}(B)) \subset B \tag{1}$$
geldt voor elke $B \subset Y$.

(c) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid in (1) niet altijd hoeft te gelden.

(d) Bewijs dat
$$\forall B \in P(Y) : f(f^{-1}(B)) = B$$
als en slechts als f surjectief is.

Antwoord (a) Voor $B \in P(Y)$ is $f^{-1}(B)$ gedefinieerd als de verzameling van alle elementen van X waarvan het beeld tot B behoort, dit is

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X.$$

(b) Zij $B \subset Y$. We bewijzen dat $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Kies $y \in f(f^{-1}(B))$ willekeurig. We tonen aan dat $y \in B$. Omdat $y \in f(f^{-1}(B))$, bestaat er (per definitie van beeld van een deelverzameling van het domein) een $x \in f^{-1}(B)$ zodat $f(x) = y$. Aangezien $x \in f^{-1}(B)$, geldt (per definitie van invers beeld van een deelverzameling van het codomein) dat $f(x) \in B$. Dus $y = f(x) \in B$, wat we moesten bewijzen. ∎

(c) Ik geef twee voorbeelden (op het examen was één voorbeeld voldoende).

Voorbeeld 1 (minimalistisch) Zij $X = \emptyset$ de lege verzameling en $Y = \{a\}$ een singleton. Zij $f = \emptyset \subset X \times Y$ de lege functie van X naar Y (dit is ook de enige functie die bestaat van X naar Y). Neem tenslotte $B = Y \subset Y$. Dan geldt dat

$$f^{-1}(B) = \{x \in \emptyset \mid f(x) \in \{a\}\} = \emptyset$$

en dus dat

$$f(f^{-1}(B)) = f(\emptyset) = \{y \in Y \mid \exists x \in \emptyset : f(x) = y\} = \emptyset.$$

We besluiten dat $f(f^{-1}(B)) = \emptyset \neq \{a\} = B$.

Voorbeeld 1 (reële functie) Zij $X = Y = \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^2$. Neem $B = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Dan geldt dat

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-1, 1]\} = [-1, 1]$$

en dus dat

$$f(f^{-1}(B)) = f([-1, 1]) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-1, 1] : x^2 = y\} = [0, 1].$$

We besluiten dat $f(f^{-1}(B)) = [0, 1] \neq [-1, 1] = B$.

(d) We bewijzen deze equivalentie door twee implicaties te bewijzen. Veronderstel eerst dat f surjectief is. We tonen aan dat

$$\forall B \in P(Y) : f(f^{-1}(B)) = B.$$

Kies dus $B \in P(Y)$ willekeurig. We bewijzen dat $f(f^{-1}(B)) = B$. Deze gelijkheid van verzamelingen tonen we aan door twee inclusies te bewijzen. Dat $f(f^{-1}(B)) \subset B$ geldt, hebben we reeds bewezen in Onderdeel (b) voor een willekeurige functie f. Rest ons te bewijzen dat $B \subset f(f^{-1}(B))$. Kies daarom $y \in B$ willekeurig, we tonen aan dat $y \in f(f^{-1}(B))$. Omdat de functie f surjectief is, bestaat er een $x \in X$ waarvoor geldt $f(x) = y$. Omdat $x \in X$ en $f(x) = y \in B$ geldt per definitie van invers beeld dat $x \in f^{-1}(B)$. Er bestaat dus een $x \in f^{-1}(B)$ met $f(x) = y$, dit wil per definitie zeggen dat $y \in f(f^{-1}(B))$, hetgeen we moesten aantonen.

Veronderstel nu dat

$$\forall B \in P(Y) : f(f^{-1}(B)) = B. \tag{2}$$

We bewijzen dat f surjectief is. Kies daarom $y \in Y$ willekeurig. We tonen aan dat er een $x \in X$ bestaat zodat $f(x) = y$. Onze veronderstelling (2) zegt dat $f(f^{-1}(B)) = B$ voor elke $B \in P(Y)$, in het bijzonder geldt dus dat $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ voor het singleton $\{y\} \in P(Y)$. Aangezien $y \in \{y\} = f(f^{-1}(\{y\}))$, geldt per definitie dat er een $x \in f^{-1}(\{y\})$ bestaat met $f(x) = y$. In het bijzonder bestaat er dus een $x \in X$ met $f(x) = y$, wat we moesten aantonen. ∎

Opmerkingen Velen spreken in hun antwoord over de inverse functie f^{-1} van f en beschouwen voor $f^{-1}(y)$ voor $y \in Y$ als een element van X. Dit is echter fout. Het is niet omdat er sprake is van $f^{-1}(B)$ voor een deelverzameling $B \subset Y$, dat men mag veronderstellen dat f een inverteerbare en dus bijectieve functie is en dat f^{-1} als (inverse) functie bestaat. In de opgave is slechts sprake van een algemene functie $f : X \to Y$ waarvan verder niets geweten is. Voor $B \subset Y$ is $f^{-1}(B)$ echter steeds gedefinieerd (of f nu inverteerbaar is of niet), maar er wordt niets anders mee bedoeld dan de verzameling $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Vraag 2 We definiëren een relatie R op de verzameling $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ door

$$((n, m), (p, q)) \in R \quad \text{als en slechts als} \quad nm = pq.$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

(b) Geef een equivalentieklasse van R met precies 3 elementen.

Antwoord (a) Om aan te tonen dat R een equivalentierelatie is, moeten we nagaan dat R reflexief, symmetrisch en transitief is.

We tonen eerst aan dat R reflexief is. Kies daarom $(n, m) \in X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ willekeurig. We moeten bewijzen dat $((n, m), (n, m)) \in R$. Dit volgt echter onmiddellijk uit de definitie van R, want natuurlijk geldt $nm = nm$.

We tonen vervolgens aan dat R symmetrisch is. Kies daarom $(n, m), (p, q) \in X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ willekeurig en veronderstel dat $((n, m), (p, q)) \in R$. We moeten aantonen dat ook $((p, q), (n, m)) \in R$. Aangezien $((n, m), (p, q)) \in R$ geldt (per definitie van R) dat $nm = pq$. Omdat $pq = nm$ mogen we besluiten dat $((p, q), (n, m)) \in R$.

Tenslotte argumenteren we dat R ook transitief is. Kies daarom $(n, m), (p, q), (k, l) \in X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ willekeurig en veronderstel dat $((n, m), (p, q)) \in R$ en $((p, q), (k, l)) \in R$. We moeten aantonen dat ook $((n, m), (k, l)) \in R$. Omdat $((n, m), (p, q)) \in R$, weten we dat $nm = pq$. Aangezien $((p, q), (k, l)) \in R$, geldt dat ook $pq = kl$. Er volgt dat $nm = kl$ en dus dat $((n, m), (k, l)) \in R$.

We besluiten dat R een equivalentierelatie is.

(b) Beschouw het element $(1, 4) \in X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De equivalentieklasse $[(1, 4)]$ van $(1, 4)$ onder de relatie R wordt (per definitie) gegeven door

$$[(1, 4)] = \{(n, m) \in X = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ((n, m), (1, 4)) \in R\}.$$

Gebruikmakend van de definitie van R vinden we dat

$$\begin{aligned} [(1, 4)] &= \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid nm = 1 \cdot 4 = 4\} \\ &= \{(1, 4), (2, 2), (4, 1)\}. \end{aligned}$$

De equivalentieklasse $[(1, 4)]$ heeft dus precies drie elementen.