Tussentijdse toets

G0U13 - Bewijzen en Redeneren

**bachelor in de Wiskunde, bachelor in de Fysica,
bachelor in de Economische Wetenschappen en
bachelor in de Wijsbegeerte**

Vrijdag 12 november 2010, 10u30 - 12u30

- *Geef je antwoorden in volledige, goed lopende zinnen, en wees nauwkeurig in je redeneringen en formuleringen.*
- *Begin voor elke vraag je antwoord op een nieuw blad. Schrijf op elk blad je naam!*
- *Voor de vragen 2, 3 en 4 mag je alle resultaten uit de cursus gebruiken, als je ze duidelijk vermeldt.*
- *Geef enkel je echte antwoorden af, met dit opgavenblad vooraan; kladpapier geef je niet af.*

Vraag 1.
Zij X en Y verzamelingen en $f : X \to Y$ een inverteerbare functie. Toon aan dat f surjectief is.

Antwoord. Dit staat in de cursus als deel van het bewijs van Stelling 4.2.5. Het volgende zou een goed antwoord zijn.

Omdat f inverteerbaar is, bestaat er (per definitie van inverteerbaarheid) een functie $g : Y \to X$ zodat $f \circ g = I_Y$ en $g \circ f = I_X$. Kies $y \in Y$ willekeurig, om surjectiviteit aan te tonen moeten we bewijzen dat er een $x \in X$ bestaat zodat $f(x) = y$. Neem $x := g(y)$. Dan is $x \in X$ en $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I_Y(y) = y$, wat we moesten bewijzen. □

Merk op dat het enige *denkwerk* verricht wordt in de zin 'Neem $x := g(y)$.', al de rest is routine.

Vraag 2.
Stel dat X en Y eindige verzamelingen zijn met elk minstens drie elementen. Zij $f : X \to Y$ een functie en stel dat voor elke $y, y' \in Y$ met $y \neq y'$ geldt dat
$$\left| f^{-1}(\{y, y'\}) \right| \leq 2.$$
Toon aan dat f injectief is. Geldt dit ook als X maar 2 elementen telt?

Antwoord. We werken met een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat f niet injectief is. Dan bestaan er twee verschillende elementen $x, x' \in X$ met $f(x) = f(x')$. Omdat X minstens drie elementen telt, kunnen we een derde element $x'' \in X$ vinden, verschillend van x en x'. We hebben twee mogelijkheden. Ofwel is $f(x'') \neq f(x)$, maar dan is
$$f^{-1}(\{f(x), f(x'')\}) \supseteq \{x, x', x''\}, \text{ zodat } \left| f^{-1}(\{f(x), f(x'')\}) \right| \geq 3$$
in tegenspraak met het gegeven. Ofwel is $f(x'') = f(x)$, en dan geldt voor een willekeurige $y \in Y$ met $y \neq f(x)$ (zulke y bestaat omdat Y minstens drie elementen telt)
$$f^{-1}(\{f(x), y\}) \supseteq \{x, x', x''\}, \text{ zodat } \left| f^{-1}(\{f(x), y\}) \right| \geq 3.$$
Dit is weer in tegenspraak met het gegeven. We vinden in beide gevallen een tegenspraak, dus moet f wel injectief zijn.

De functie $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\} : x \mapsto 1$ is niet injectief, maar voldoet wel aan de gestelde voorwaarde. De eigenschap geldt dus niet als X maar 2 elementen telt.

Vraag 3.
Definieer de rij van Fibonacci $F_0, F_1, F_2, \ldots$ door de volgende recursierelatie:
$$F_0 = F_1 = 1, \text{ en voor elke } n \in \mathbb{N}:$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
Deze rij begint dus als 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Bewijs door middel van volledige inductie dat voor elke $n \geq 1$ het element F_{4n-1} deelbaar is door 3.

Antwoord. De **basisstap** voor de inductie bestaat uit de vaststelling dat $F_{4\cdot 1-1} = F_3 = 3$ deelbaar is door 3.

In de **inductiestap** bewijzen we dat als F_{4n-1} deelbaar is door 3 voor $n \in \mathbb{N}_0$, dat dan ook $F_{4(n+1)-1} = F_{4n+3}$ deelbaar is door 3. Door de definitie van F_n meermaals te gebruiken zien we dat

$$F_{4n+3} = F_{4n+2} + F_{4n+1} = 2F_{4n+1} + F_{4n} = 3F_{4n} + 2F_{4n-1}.$$

Door de inductiehypothese geldt dat F_{4n-1} deelbaar is door drie, en doordat $3F_{4n}$ een drievoud is, geldt dat ook voor de som F_{4n+3}.

Conclusie: Het principe van volledige inductie laat ons nu toe te besluiten uit deze basisstap en inductiestap dat F_{4n-1} deelbaar is door 3 voor elke $n \geq 1$.

Vraag 4.
Beschouw de relatie R op de verzameling $X = \mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, die als volgt gedefinieerd wordt: $(x, y) \in R$ als en slechts als $xy = m^2$ voor een $m \in \mathbb{N}$.

(a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is.

(b) Geef 3 elementen uit de equivalentieklasse [6].

(c) Is het aantal equivalentieklassen eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar oneindig? En is het aantal elementen in elke klasse eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar oneindig? Het is voldoende tweemaal te antwoorden met de juiste kardinaliteit, je hoeft niets te bewijzen.

(d) We maken nu een kleine aanpassing: beschouw de relatie R', op dezelfde wijze als R gedefinieerd, maar nu op de verzameling $X' = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Toon aan dat deze nieuwe relatie R' **geen** equivalentierelatie is.

Antwoord.

(a) We moeten nagaan dat R symmetrisch, reflexief en transitief is. Evident geldt voor elke $x, y \in \mathbb{N}_0$ dat als $xy = m^2$, dat dan ook $yx = m^2$, zodat R symmetrisch is. Ook is $xx = x^2$ zodat R reflexief is. Voor transitiviteit nemen we een $z \in \mathbb{N}_0$ en stellen dat (x, y) en (y, z) tot R behoren. We moeten aantonen dat $(x, z) \in R$. Neem natuurlijke getallen m en n zodat $xy = m^2$ en $yz = n^2$. Dan is

$$xz = \left(\frac{mn}{y}\right)^2.$$

Omdat het kwadraat van mn/y geheel is, is mn/y dat ook, en dus is xz het kwadraat van een natuurlijk getal en $(x, z) \in R$.

(b) 6, $6 \cdot 4 = 24$ en $6 \cdot 9 = 54$.

(c) Het aantal klassen is zeker aftelbaar, want hoogstens zo groot als het aantal natuurlijke getallen. Omdat elk priemgetal in een verschillende klasse zit, zijn er oneindig veel klassen. Dus het aantal equivalentieklassen is aftelbaar oneindig. Als x tot een equivalentieklasse behoort, dan behoort xn^2 voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ ook tot die klasse, zodat de klassen aftelbaar oneindig zijn.

(d) Er geldt dat $(1, 0)$ en $(0, 2)$ tot R' behoren, maar $(1, 2)$ niet. Dus R' is niet transitief.