

Examen algebraïsche structuren

20/08/2012

Theorie

1. Geef en bewijs de formule voor de Eulerfunctie bij een priemgetal.
Bijvraag: Wat is de formule voor een willekeurig getal en hoe kom je daaraan?
2. Geef en bewijs de Stelling van Sylvester. (Aangezien het bewijs vrij lang is, hoef je geen eerdere lemma's die je gebruikt te bewijzen, maar vermelden wel).
Bijvraag: Geld de stelling ook over het veld $\mathbb{Z}_5$. Hint: Ga eens na voor $[3]_5$.
Bijvraag: En hoe zit het voor $[-3]_5$?

Oefeningen

1. Zij p een priemgetal en $n \in \mathbb{N}_0$, zodat $p|n$, maar p^2 niet. Bewijs dan dat:
$$p^{\varphi(n)+1} \equiv p \pmod{n}$$
2. Zij $G, \circ$ een groep met elementen a en b , waarvoor geldt $a \circ b = b \circ a$. De elementen hebben orde n respectievelijk m , met $\gcd(n, m) = 1$:
 - (a) Bewijs dan dat $\langle a \rangle$ een deelgroep is van $\langle a \circ b \rangle$.
 - (b) Bewijs dan dat $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$. Geldt de stelling ook nog als $a \circ b \neq b \circ a$?
3. -Zal later aangevuld worden-