

Examen Complexe Analyse

26 juni 2018

Alle vragen tellen even zwaar mee, elk op 10 punten voor een totaal van 50 punten.

1 Vraag 1

1. Bepaal de polen van de functie

$$z \mapsto \frac{e^{iz}}{a^4 + z^4}, \quad a \geq 0.$$

Wat zijn de residu's? (Maak een onderscheid tussen de gevallen $a > 0$ en $a = 0$).

2. Bereken de integraal

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^4 + x^4} dx$$

voor $a > 0$.

2 Vraag 2

Zij $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfe functies. Noteer met N_f het aantal nulpunten van f . Veronderstel dat alle nulpunten van f en g in $D_r(0)$ bevat zitten voor een $r > 0$.

1. Stel $N_f = N_g$. Toon aan dat er een holomorfe functie $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (h heeft dus geen nulpunten) bestaat zodat voor $R \geq r$ groot genoeg

$$|f(z) - h(z)g(z)| < |f(z)|, \quad \forall |z| = R.$$

2. Verklaar waarom er zo geen R en h bestaan als $N_f \neq N_g$.

3 Vraag 3

1. Stel f een holomorfe functie met de eigenschap dat

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0.$$

Toon aan dat f een rationale functie is.

2. Vind de unieke f die aan de bovenstaande eigenschap voldoet en waarvoor geldt dat

- f heeft dubbele pool in 0 met residu 0
- f heeft een enkelvoudige pool in -1 met residu 1
- f heeft een dubbel nulpunt

Verklaar ook waarom de functie die je vindt uniek is.

4 Vraag 4

1. Vind een conforme afbeelding van

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1/2, -\alpha < \arg(z) < \alpha\}$$

naar de eenheidsschijf $\mathbb{D}$.

2. Toon aan dat de familie

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{D} \rightarrow S_\alpha \mid f \text{ holomorf}, f(0) = 1\}$$

een normaal is.

5 Vraag 5

Stel $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ en beschouw een holomorfe functie $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ met de eigenschap dat

$$f(z+1) = \Gamma(z)f(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

1. Toon aan dat f een analytische voortzetting heeft tot het linkerhalfvlak.
2. Wat zijn de polen en nulpunten van deze uitbreiding?