# Examen Meetkunde 2

juni 2018

## 1 Mondeling deel

### 1.1 Vraag 1

Beschouw twee rechten $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{R}P^2$ en een projectieve transformatie $\phi : \ell_1 \to \ell_2$. Toon aan dat elke rechte gevormd door een punt $P \in \ell_1$ te verbinden met zijn beeld $\phi(P)$ raakt aan eenzelfde kegelsnede.

### 1.2 Vraag 2

Definieer het oppervlak $M_f$ als het beeld van de afbeelding

$$x : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{E}^3 : (u, v) \mapsto (u, f(u) \cos v, f(u) \sin v).$$

1. Voor welke functies $f$ is $M_f$ een minimaal oppervlak? (Hint: je kan de differentiaalvergelijking voor $f$ oplossen door ze nog eens af te leiden.)
2. Beschouw de twee cirkels

$$C_{-d} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -d \\ x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \qquad , C_d \longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = d \\ x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \quad .$$

   Toon aan dat er een $d_0 > 0$ bestaat zodat voor $0 < d < d_0$ er 2 minimale oppervlakken van de vorm $M_f$ zijn die $C_{-d}$ en $C_d$ omvatten, voor $d = d_0$ juist één en voor $d > d_0$ geen. Hint: gebruik een somformule voor sinh en cosh (deze hint werd niet gegeven op het examen).

## 2 Schriftelijk deel

### 2.1 Vraag 1

Beschouw drie vlakken $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ in $KP^4$ met de eigenschap dat ze twee aan twee snijden in een punt en zodat $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Toon aan dat er een uniek vlak $\pi_0$ bestaat zodat $\pi_0 \cap \pi_i$ een rechte is voor alle $i = 1, 2, 3$.

### 2.2 Vraag 2

Beschouw de kromme $C \longleftrightarrow x^6 + y^6 - 2x^3y^3 - 9x^2y^2 = 0$.

1. Vind alle meervoudige punten van $C$ en bereken de hoofdraaklijnen aan deze punten.
2. Bereken de asymptoten van $C$
3. Geef twee symmetrieassen van $C$ en vind de snijpunten van $C$ met deze assen.
4. Schets deze kromme en geef aan welke (extra) informatie je waar gebruikt.

## 3 Vraag 3

Beschouw de oppervlakken $M_1$ en $M_2$ als de beelden van de afbeeldingen

$$x_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}^3 : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, \ln u),$$

$$x_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}^3 : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, v).$$

1. Bereken de Gauskrommingen van $M_1$ en $M_2$.
2. Bestaat er een lokale isometrie tussen $M_1$ en $M_2$?
3. Zijn $M_1$ en $M_2$ congruent?