Examen 20 Januari 2020

niet zo lit lit niet zo dab dab

January 2020

1 Theorie

1.1 Vraag 1

Bewijs: G is enkelvoudig als en slechts als $G \cong \mathbb{Z}_p$ met p priem.

1.2 Vraag 2

Zij R een integriteitsdomein. Wanneer is een element $x \in R$ irreducibel. Bewijs dan:
Een element $x \in R$ is een irreducibel als en slechts als elke deler vsn x een eenheid is of geassocieerd is met x.

1.3 Vraag 3 (Mondeling)

Bewijs: Stelling van Kronecker.
Bijvraag: Bij het deel dat je bewijst dat $\overline{X}$ een wortel is, moest ik de verschillende stappen uitleggen (waarom ik ze dus mocht doen).
Andere bijvragen: Geef een matrix die beiden hermitisch en unitaire is (en als je er een wist moest je nog andere geven).
Wat zijn de eigenwaarden van een nilpotente Matrix.

2 Oefeningen

2.1 Vraag 1

Zij F een groep en A en B normale commutatieve deelgroepen van G. Waar of fout, bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) $\forall a \in A : \forall b \in B : ab = ba$

(b) $\forall a \in A : \forall b \in B : aba^{-1}b^{-1} \in A \bigcap B$

(c) Als $A \bigcap B = \{e\}$, dan geldt dat $G \cong \frac{G}{A} \bigoplus \frac{G}{B}$

(d) $A \bigcap B = \{e\}$, dan geldt AB is een commutatieve deelgroep van G en isomorf met $A + B$.

2.2 Vraag 2

Zij $R, +, \cdot$ een domen een I een priemideaal van R.

(a) Zij R een HID, dan is R/I een HID.

(b) Bewijs dat het omgekeerde niet geldt.

(c) Zij $R[X]$ een HID, dan geldt dat R een veld is.

2.3 Vraag 3

Neem $\alpha = i\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$.

(a) Wat is het minimale veelterm f van α over $\mathbb{Q}$.

(b) Wat is het ontbindingsveld E van f over $\mathbb{Q}$ en bepaal $[E : \mathbb{Q}]$.

2.4 Vraag 4

Beschouw $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$. Stel $\phi_{A^2} = (x-1)^2$ de minimale veelterm van A^2.
Wat zijn de mogelijke minimale veeltermen en de bijhorende jordanmatrices van A. Leg je antwoord zorgvuldig uit.