Differentiaalvergelijkingen
examen 23 januari 2009

Theorie Van Assche

$\boxed{1}$ Beschouw het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - x(x^2+y^2) \\ -x + y - y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Zoek eerst de kritieke punten van dit stelsel en bespreek de aard ervan. Transformeer het stelsel vervolgens tot eentje in poolcoördinaten (Hint: bekijk $xx' + yy'$ en $yx' - xy'$). Zoek de kritieke punten en bespreek de aard van elk van deze punten. Schets het verloop in het xy fasevlak.

$\boxed{2}$ De differentiaalvergelijking van Legendre zoals gezien in de cursus. Wat voor punten zijn $x = \pm 1$? Zoek een machtreeksoplossing voor het punt $x = 1$. Leg uit hoe een tweede lineair onafhankelijke oplossing gevonden kan worden (uitwerken hoeft niet).

Theorie Fannes

$\boxed{1}$ Los de volgende differentiaalvergelijking op met een Laplacetransformatie:

$$x''(t) + x(t) = f(t) \quad \text{met } x(0) = x'(0) = 0$$

Bijvraag: Geef een fysische interpretatie aan de gevonden oplossing (met een diracverdeling).

$\boxed{2}$ Los de vergelijking van Laplace Δu op voor een ring met $0 < R_1 < R_2$. Hierbij is gegeven dat $u(x) = 0$ als $|x| = R_1$ en $u(x) = \Phi$ als $|x| = R_2$, met Φ een stuksgewijs gladde functie. Hoe kan je functie u vinden die voldoet aan $u(x) = \Phi_1$ als $|x| = R_1$ en $u(x) = \Phi_2$ als $|x| = R_2$ (Hint: denk aan voorbeeld 14.6 in de cursus).

Oefeningen

$\boxed{1}$ Eerst de exponentiële van een eenvoudige matrix uitrekenen (eigenwaarden 0 en 5, eigenvectoren heel eenvoudig uit te rekenen). Vervolgens:

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Bepaal de matrix B. Tot slot nog het volgende stelsel uitwerken:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ De diffusievergelijking in 2 dimensies in een rechthoekig gebied $0 < x < a$ en $0 < y < b$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

We zoeken oplossingen van de vorm $u(x, y, t) = X(x)Y(y)e^{-\lambda k t}$. We hebben de volgende voorwaarden:

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0 \text{ en } u'(x, 0, t) = u'(x, b, t) = 0$$

Stel eerst Sturm-Liouvilleproblemen op voor X en Y en los deze op. Aan welke voorwaarden moeten de eigenwaarden voldoen? Los ten slotte het probleem op als gegeven is dat $u(x, y, 0) = f(x)$. Stel hiervoor een geschikte reeks op.

⋆ ⋆ ⋆