Vraag:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	4	4	4	4	4	20
Score:						

Examen Kansrekenen I - 23 juni 2020

Naam :
Voornaam :

Richting :
Studentennummer :

Lees de volgende aanwijzingen alvorens aan het examen te beginnen

- Het is verplicht om tijdens het examen een **mondmasker** te dragen. Je mag je masker voor korte tijd afnemen om iets te drinken en/of te eten.
- Wie de vragen aanneemt en bekijkt, moet **minstens 90 minuten** blijven zitten.
- Schrijf op het 1ste blad duidelijk je volledige naam en richting (en **op elk blad je naam**).
- Je mag gebruik maken van **niet-grafische rekenmachine, tabel met integralen, formularium en statistische tabellen**. Op het formularium en de tabellen mag niets geschreven staan! Berekeningen moeten altijd schriftelijk uitgevoerd worden tot het moment dat je de waarde zou kunnen opzoeken in een statistische tabel. Bijvoorbeeld: het uitrekenen van een kans onder een normale verdeling moet herleid worden tot een kans onder een standaardnormale verdeling. Zoek deze kans vervolgens dan ook op.
- Alle communicatie-apparatuur is strikt verboden.
- Gebruik de voorziene ruimte om te antwoorden op de vragen (voor- en achterkant).
- Bij het indienen van je examen, **geef je ook kladpapier af** (maar daar wordt geen rekening mee gehouden tijdens verbetering). Er is hiervoor een aparte doos voorzien.
- Let op
  - een correct (numeriek) antwoord zonder uitleg (of foute uitleg) is weinig/niets waard!
  - een fout (numeriek) antwoord zonder uitleg is niets waard.
  - een fout numeriek antwoord (bvb. ten gevolge van een rekenfout) met juiste afleiding is veel waard.

  Toon dus **DUIDELIJK aan hoe je tot ieder numeriek resultaat komt** (telegramstijl is toegelaten). Geef de nodige **tussenstappen** en geef aan welke **regels en/of stellingen** je gebruikt bij het oplossen van de vraag. Gebruik de **correcte wiskundige notatie** zoals die in de leerstof is aangebracht. **Verklaar gebruikte symbolen**. Werk met drie cijfers na de komma.
- Je hebt **3 u** tijd om het examen op te lossen.

VEEL SUCCES !

Vraag 1: (4 punten)

(a) Geef de definitie van een σ-algebra.

Oplossing: Een klasse $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van een universum Ω heet σ-algebra als

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- als $A \in \mathcal{A}$, dan is ook $A^C \in \mathcal{A}$;
- als voor alle $n \in \mathbb{N}: \; A_n \in \mathcal{A}$, dan is ook $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

(1 punt)

(b) Zij $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ een kansruimte en zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een stochastische veranderlijke. Verder zij $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{indien } |X(\omega)| \leq 2 \\ 0 & \text{indien } |X(\omega)| > 2 \end{cases}.$$

Toon aan dat Y ook een stochastische veranderlijke is.

Oplossing: Zij $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ een Borelverzameling. We onderscheiden twee gevallen:

- Als $0 \notin B$ is

  $$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \text{ en } |X(\omega)| \leq 2\} = X^{-1}(B) \cap X^{-1}([-2,2]).$$

  Omdat X een s.v. is, is dit een doorsnede van twee verzamelingen in $\mathcal{A}$ en dus $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

- Als $0 \in B$ is

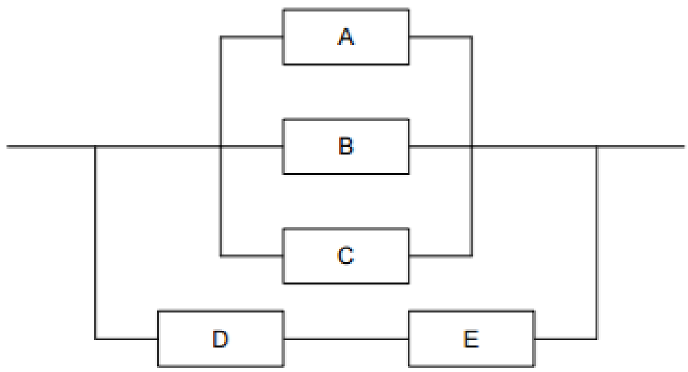
  $$\begin{aligned} Y^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)| > 2\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \text{ en } |X(\omega)| \leq 2\} \\ &= X^{-1}((2,\infty)) \cup X^{-1}((-\infty,2)) \cup (X^{-1}(B) \cap X^{-1}([-2,2])). \end{aligned}$$

  Omdat X een s.v. is, is dit de unie van drie verzamelingen in $\mathcal{A}$ en dus $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(2 punten voor een juiste beschrijving van de inverse beelden (1 deelpunt voor een gedeeltelijk juiste beschrijving, wees genereus. 1 punt voor het correcte gebruik van de meetbaarheid van X).

Vraag 2: (4 punten)

Beschouw de onderstaande schakeling met vijf componenten A, B, C, D, en E:



Het is geweten dat het falen van deze componenten onafhankelijk van elkaar is, en dat

$$\begin{aligned} &P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.5, \\ &P(D) = 0.3, \quad P(E) = 0.1, \end{aligned}$$

waarbij $P(A)$ de kans voorstelt dat component A faalt, enz.

(a) Wat is de kans dat het systeem faalt?

> **Oplossing:** Noem F de gebeurtenis dat het systeem faalt
>
> $$\begin{aligned} P(F) &= P((A \cap B \cap C) \cap (D \cup E)) \\ &= P(A \cap B \cap C)P(D \cup E), \\ &= P(A)P(B)P(C)(P(D) + P(E) - P(D)P(E)) \\ &= 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.37 = 0.0222. \end{aligned}$$
>
> (1 punt)

(b) Als geweten is dat het systeem niet faalt, wat is dan de kans dat component B faalt?

> **Oplossing:** Gebruik de stelling van Bayes om te bekomen dat
>
> $$P(B|F^c) = \frac{P(F^c|B)P(B)}{1 - P(F)}.$$
>
> (1 punt)

Voor de teller hebben we

$$\begin{aligned}
P(F^c|B) &= P((D^c \cap E^c) \cup (A^c \cup C^c)) \\
&= (1 - P(D))(1 - P(E)) + P(A^c \cup C^c) \\
&\quad - (1 - P(D))(1 - P(E))P(A^c \cup C^c) \\
&= 0.63 + ((1 - P(A)) + (1 - P(C)) - (1 - P(A))(1 - P(C))) \\
&\quad - 0.63P(A^c \cup C^c) \\
&= 0.63 + (0.6 + 0.5 - 0.3) - 0.63\,(0.6 + 0.5 - 0.3) \\
&= 0.63 + 0.8 - 0.63 \cdot 0.8 = 0.926.
\end{aligned}$$

(1 punt)
Dus,

$$P(B|F^c) = 0.926 \cdot 0.3/(1 - 0.0222) = 0.284.$$

(1 punt)

Vraag 3: (4 punten)

Een discrete variabele X heeft volgende momentgenererende functie

$$M_X(t) = \frac{1}{4}(e^{-at} + e^{-t} + e^{t} + e^{bt})$$

met parameters $a > 0$ en $b > 0$.

(a) Bereken de waarden van a en b als geweten is dat $E(X) = 0$ en $\text{Var}(X) = 13$.

Oplossing: We merken eerst op dat

$$E(X) = \frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(-a - 1 + 1 + b) = \frac{1}{4}(b - a)$$

$E(X) = 0$ impliceert dus $a = b$. (1 punt)
Verder weten we dat

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(a^2 + 1 + 1 + a^2) = \frac{a^2+1}{2}.$$

$\text{Var}(X) = 13$ impliceert dus $a^2 = 25$ en dus $a = b = 5$ (omdat $a > 0$). (1 punt)

(b) Geef, gebruik makende van $E(X) = 0$ en $\text{Var}(X) = 13$, een ondergrens voor volgende kans: $P(|X| < 4)$. Wees nauwkeuriger dan $P(|X| < 4) \geq 0$.

Oplossing: We gaan een benadering zoeken voor deze kans via een gevolg van de ongelijkheid van Chebychev:

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 4) = P(|X - 0| \geq 4) = P(|X - E(X)| \geq 4) \\ \leq \frac{\text{Var}(X)}{4^2} = \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

Dit geeft dan

$$P(|X| < 4) = 1 - P(|X| \geq 4) \geq 1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16} = 0.01875.$$

(1 punt voor het toepassen van Chebyshev. 1 punt voor een correct resultaat.)

Vraag 4: (4 punten)

Stel dat X de score is op een wiskundetest (tussen 0 en 1) en Y de score is op een fysicatest (ook tussen 0 en 1). Stel dat voor studenten van de KU Leuven, de scores X en Y de volgende gezamenlijke dichtheidsfunctie hebben

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+3y) & 0 \le x \le 1 \text{ en } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Bepaal de constante c.

> **Oplossing:** We hebben dat
>
> $$1 = c\int_0^1 \int_0^1 (x+3y)\, dxdy = c\int_0^1 \frac{1}{2} + 3y\, dy = c\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right).$$
>
> Daarom is $c = \frac{1}{2}$. (1 punt)

(b) Bereken de proportie studenten die meer dan 0.8 scoren op de wiskundetest.

> **Oplossing:** De proportie is
>
> $$\int_0^1 \int_{0.8}^1 \frac{1}{2}(x+3y)dxdy = 0.23.$$
>
> (1 punt)

(c) Gegeven dat een student 0.3 behaalde op de fysicatest, wat is de kans dat de score op de wiskunde test groter zal zijn dan 0.8?

> **Oplossing:** Voor $0 \le y \le 1$, is de marginale dichtheidsfunctie van Y
>
> $$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{2}(x+3y)\, dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 3y).$$
>
> Bijgevolg, voor $0 \le x \le 1$ en $0 \le y \le 1$
>
> $$f_{X|Y}(x|y) = \frac{x+3y}{\frac{1}{2}+3y} = \frac{2x+6y}{1+6y}.$$
>
> (0.5 punten voor de juiste formule, 0.5 punten voor het vermelden van het definitiegebied.)
> Voor $Y = 0.3$ volgt het dat
>
> $$f_{X|Y}(x|y=0.3) = \frac{2x+1.8}{2.8} \text{ voor } 0 \le x \le 1.$$
>
> Bijgevolg
>
> $$P(X > 0.8|Y = 0.3) = \int_{0.8}^1 \frac{2x+1.8}{2.8} dx = 0.257.$$
>
> (1 punt voor de correcte oplossing).

Vraag 5: (4 punten)

De dichtheidsfunctie van een s.v. X wordt gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{\theta}\right) \exp(\frac{-x^2}{\theta}) & x > 0 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Hierbij is $\theta > 0$ een schaalparameter. Deze dichtheidsfunctie wordt de Rayleigh dichtheidsfunctie genoemd.

(a) Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X.

Oplossing:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x \left(\frac{2z}{\theta}\right) \exp(\frac{-z^2}{\theta}) dz \\ &= \int_0^{x^2/\theta} \exp(-u) du \qquad \text{met } u = \frac{z^2}{\theta} \text{ en } du = \frac{2z}{\theta} dz \\ &= 1 - \exp(-x^2/\theta). \end{aligned}$$

(1 punt)

(b) Stel dat s.v. X Rayleigh verdeeld is. Hoe is $Y = X^2$ dan verdeeld?

Oplossing: X is een continue s.v. met een strikt positieve dichtheid op $S =]0, +\infty[$. We hebben hier te maken met een transformatiefunctie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto h(x) = x^2$ die strikt stijgend is op S. Merk op dat $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$ voor $y \in h(S) =]0, +\infty[$. De stelling voor monotone transformaties toepassen geeft

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} f_X\left(\sqrt{y}\right) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \end{aligned}$$

(0.5 punten voor het nagaan van de voorwaarden, 0.5 van de juiste toepassing van de stelling.)
Y heeft dus een exponentiële verdeling met parameter $\frac{1}{\theta}$, $Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ (1 punt) .

(c) Leg zo gedetailleerd mogelijk uit hoe je random getallen uit een Rayleigh verdeling kan genereren, vertrekkende van random getallen uit de standaard uniforme verdeling $U \in \mathcal{U}[0, 1]$.

Oplossing: We berekenen de inverse van de verdelingsfunctie

$$F_X^{-1}(y) = \sqrt{-\theta \log(1 - y)}$$

Bijgevolg is $\sqrt{-\theta \log(1 - U)}$ of $\sqrt{-\theta \log(U)}$ Raleigh verdeeld. We kunnen random getallen uit een Rayleigh verdeling genereren door deze transformatie toe te passen op de random getallen uit de standaard uniforme verdeling. (1 punt)