Kanrekenen
examen 24 augustus 2009

Theorie

$\boxed{1}$ Bewijs de volgende resultaten. Als, voor $n \to \infty$, $X_n \xrightarrow{P} X$ en $Y_n \xrightarrow{P} Y$, dan geldt

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$, als $n \to \infty$.
2. $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{P} X \cdot Y$, als $n \to \infty$.

$\boxed{2}$

1. Zij Ω een universum en $\mathcal{B}$ een sigma-algebra over Ω. Geef de definitie van een kansmaat op $(\Omega, \mathcal{B})$.
2. Bewijs het volgende resultaat: Weze $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ een kansruimte. Dan geldt:
   (a) Als $\{A_n | n \in \{1, \cdots, N\}\}$ paarsgewijs disjunct zijn en $\forall n \in \{1, \cdots N\}, A_n \in \mathcal{B}$, dan
   $$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n).$$
   (b) $\forall A \in \mathcal{B} : P(A^C) = 1 - P(A)$. In het bijzonder is $P(\emptyset) = 0$.
   (c) Als $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A_n \in \mathcal{B}$ en de rij (A_n) is monotoon, dan is
   $$P\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

$\boxed{3}$ Zij (X_n) een rij van onderling onafhankelijke s.v., allen met dezelfde verdeling als X met dichtheidsfunctie
$$f_X(x) = \begin{cases} \exp(-x+\theta) & \text{als } x \geq \theta \\ 0 & \text{als } x < \theta. \end{cases}$$
waarbij $0 \leq \theta < \infty$.

1. Toon aan dat $\min(X_1, \cdots, X_n)$ in verdeling convergeert naar een stochastische veranderlijke die ontaard is in het punt θ.
2. Beschouw $Y_n = \max(X_1, \cdots, X_n) - \ln n$. Toon aan dat Y_n in verdeling convergeert en bepaal de limietverdeling.

$\boxed{4}$

1. Bewijs: Zij X een continue s.v. met dichtheidsfunctie $f_X(x)$, zodanig dat $f_X(x) = 0$ voor $x \notin S$. Zij $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zo dat $U = h(X)$ ook een s.v. is. Indien h een differentieerbare, strikt stijgende of strikt dalende functie op S is, dan wordt de dichtheidsfunctie van U gegeven door
$$f_U(u) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(u)) \left|\frac{dh^{-1}(u)}{du}\right| & \text{voor } u \in h(S) \\ 0 \text{ elders.} \end{cases}.$$
2. Zij X een s.v. met standaard normale verdeling. Bepaal de verdeling van $U = X^2$. Detailleer je antwoord.

⋆ ⋆ ⋆

Oefeningen

$\boxed{1}$ In een urne zitten $k+1$ vervalste muntstukken, genummerd als $i = 0, 1, \cdots, k$ $(k \geq 1)$. Bij het opwerpen van een muntstuk geldt: $P($ "Kruis" $) = i/k$, voor $i = 0, 1, \cdots, k$.

1. Je trekt een willekeurig muntstuk uit de urne en gooit het op. Wat is de kans op "Kruis"?
2. Je hebt nog steeds een muntstuk verkregen uit een willekeurige trekking. Je gooiede dit herhaaldelijk op en n maal na mekaar kreeg je "Kruis". Wat is de voorwaardelijke kans op "Kruis" in de volgende worp?
3. Noem X het aantal keer "Kruis" als je alle muntstukken één na één uit de urne haalt, ze opgooit en de uitslag bijhoudt. Wat is de verwachtingswaarde van X, en wat is de variantie van X? (Je kreeg hier een hint bij, schrijf X als een som van s.v.)

$\boxed{2}$ De gezamenlijke dichtheidsfunctie $f_{X,Y}$ van de stochastische vector (X, Y) wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = x \exp(-x(y + 1)),$$

op het gebied bepaald door de $x > 0, y > 0$.

1. Vind de voorwaardelijke dichtheid $f_{X|Y}(x|y)$.
2. Bereken $E\left[\sqrt{Y+1}\ \right]$
3. Bereken $P(X > 2Y)$.
4. Definieer $V = XY$. Bepaal de dichtheidsfunctie van de stochastische veranderlijke V.

$\boxed{3}$

1. Zij (X_n) een rij van s.v. waarbij X_n geometrisch verdeeld is met parameter λ/n (met $\lambda > 0$). Wat is dan de karakteristieke functie van X_n/n? Bestudeer vervolgens de convergentie in verdeling van X_n/n en vind de limietverdeling.
2. Beschouw nu een rij onderling onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische veranderlijken Y_k, die allen de in vorig puntje gevonden limietverdeling hebben. Definieer nu $V_k = Y_k - 1/\lambda$, en noteer $S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$.
   (a) Wat kan je zeggen over de convergentie in verdeling van S_n?
   (b) Vind een goede benadering voor de parameter λ indien je weet dat
   $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{3}.$$

⋆ ⋆ ⋆