

Examen 26 juni

Indonesian boat racer

26 juni 2025

1 Theorie

1.1 Projectieve [4ptn]

- a) Definieer de volgende begrippen:
 - i. Lineair systeem
 - ii. Lineair systeem hypervlakken
 - iii. De as van een lineair systeem
- b) Vul aan en bewijs de volgende uitspraken voor lineaire systemen Σ^l en Σ^k :
 - i. $\Sigma^k \cap \Sigma^l$ heeft as ...
 - ii. $\Sigma^k + \Sigma^l$ heeft as ...
- c) Dualiseer de volgende uitspraak in $\mathbb{RP}^4$: Rechten l_1 en l_2 snijden elkaar in het punt P in het vlak V .

1.2 Krommen [4ptn]

- a) Definieer een reguliere kromme.
- b) Toon aan dat elke reguliere kromme een booglengteparametrisatie heeft.
- c) Toon aan dat een kromme $\alpha \in \mathbb{E}^n$ in een hypervlak ligt als er een constante vector w bestaat met $\alpha' \cdot w = 0$ voor alle t .

2 Oefeningen

2.1 Affiene [3ptn]

Zij ABC een driehoek in $\mathbb{A}^2$. Neem Q op AB en P op AC zodat PQ en BC parallel zijn. Zij M het middelpunt van BC . Toon synthetisch¹ aan dat als PC en QB een snijpunt hebben deze op AM ligt.

¹:(

2.2 Euclidische [3ptn]

Beschouw het vlak α in $\mathbb{E}^4$ met vergelijking:

$$x_2 + x_4 = 2 \quad (1)$$

$$x_1 - x_3 = 0. \quad (2)$$

Beschouw ook $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Zij dan R_α de spiegeling rond

het vlak α en $K = t_d \circ C$. Vind dan voor de samenstelling $F = K \circ R_\alpha$ de ontbinding in t_b en G uit stelling 30.

2.3 Projectieve [3ptn]

Zij l_1, l_2, l_3, l_4 rechten in $\mathbb{R}P^3$. Stel dat l_1 en l_2 elkaar snijden in een punt A en l_3, l_4 zijn kruisend met l_1 en l_2 en onderling.

- Toon aan dat er hoogstens 2 rechten zijn die l_1, l_2, l_3, l_4 allemaal snijden.
- Onder welke voorwaarden zijn er exact 2 zulke rechten?

2.4 Krommen [3ptn]

Zij $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en beschouw een booglentegeparametriseerde kromme met $\text{Im}(\beta) \subset S^2$. We definiëren zoals gewoonlijk $T(s) = \beta'(s)$. Echter definiëren we $N^{\mathbb{S}}(s) = T(s) \times \beta(s)$ en $\kappa^{\mathbb{S}} = T'(s) \cdot N^{\mathbb{S}}(s)$.

- Argumenteer dat voor alle $t \in I$ geldt: β, T, N vormen een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^3$.
- Toon aan:

$$\beta'(s) = T'(s) \quad (3)$$

$$T'(s) = -\beta(s) + \kappa^{\mathbb{S}}(s)N(s) \quad (4)$$

$$(N^{\mathbb{S}})'(s) = -\kappa^{\mathbb{S}}(s)T(s) \quad (5)$$

- Voor welke β is $\kappa^{\mathbb{S}}(s) = 0$?