

Algebra II: Examen

Johannes Nicaise

29 juni 2023

- Examen duurde 3 uur (4 uur voor studenten met faciliteiten). Cursus Algebra II (+ eigen notities) en Algebra I waren toegestaan. Uitgewerkte oefeningen niet.

Ter herinnering: voor elk geheel getal $n \geq 1$ noteren we met $\mathcal{S}_n$ de permutatiegroep van $\{1, \dots, n\}$. De alternerende groep $\mathcal{A}_n$ is de kern van het unieke groepsmorfisme

$$\text{sgn} : \mathcal{S}_n \rightarrow (\{1, -1\}, \cdot)$$

dat elke transpositie van twee verschillende elementen in $\{1, \dots, n\}$ afbeeldt op -1 . Je mag vrij gebruiken dat $\mathcal{A}_n$ de enige deelgroep is van index 2 in $\mathcal{S}_n$

- (1) Zij $f(X)$ een irreducibele veelterm van graad 4 in $\mathbb{Q}[X]$, met complexe wortels $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. We noteren met G de Galoisgroep van $f(X)$ over $\mathbb{Q}$. De *kubische resolvent* van $f(X)$ is gedefinieerd door

$$R(X) = (X - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4))(X - (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4))(X - (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)).$$

Er zijn expliciete formules voor $R(X)$ in termen van de coëfficiënten van $f(X)$, maar die heb je niet nodig in deze oefening.

- (a) Toon aan dat $R(X)$ een veelterm is met coëfficiënten in $\mathbb{Q}$. **(3 punten)**
(b) Veronderstel dat $R(X)$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$. Toon aan dat G isomorf is met de symmetrische groep $\mathcal{S}_4$ of de alternerende groep $\mathcal{A}_4$. **(4 punten)**
(c) Veronderstel dat $f(X) = X^4 + 8X + 12$. Je mag vrij gebruiken dat $f(X)$ en $R(X)$ irreducibel zijn in $\mathbb{Q}[X]$. De *discriminant* van $f(X)$ is gedefinieerd als

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Je mag vrij gebruiken dat $\Delta = 576^2$. Toon aan dat G isomorf is met $\mathcal{A}_4$ en dat G minstens 7 elementen heeft van oneven orde. **(3 punten)**

- (d) Bewijs dat er een velduitbreiding F van $\mathbb{Q}$ bestaat zodat $[F : \mathbb{Q}] = 4$ en zodat F geen deelveld bevat van uitbreidingsgraad 2 over $\mathbb{Q}$. **(4 punten)**
- (2) (a) Zij G een groep van orde 12. Toon aan dat G precies 1 of 4 Sylow 3-deelgroepen heeft, en precies 2 of 8 elementen van orde 3. **(2 punten)**
(b) Zij G een groep van orde 12 met 8 elementen van orde 3. Toon aan dat G een unieke Sylow 2-deelgroep heeft. **(2 punten)**
(c) Toon aan dat elke groep van orde 12 oplosbaar is. **(2 punten)**
(d) Zij q een oneven priemgetal en G een niet-commutatieve groep van orde $4q$. Veronderstel dat G een unieke Sylow 2-deelgroep heeft en noteer deze met P . Zij Q een Sylow q -deelgroep van G . Bepaal de orbieten van de actie van Q op P door conjugatie en besluit dat $q = 3$. **(2 punten)**

- (3) Beschouw de groep G gedefinieerd door de presentatie

$$G = \langle a, b, c \mid a^3b^{-2}, a^3c^{-2}, abc^{-1} \rangle.$$

- (a) Bewijs dat G normale deelgroepen N_1 en N_2 heeft zodat $G/N_1 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en $G/N_2 \cong \mathcal{S}_3$. **(2 punten)**
(b) Toon aan dat $ba = a^2b^{-1} = a^{-1}b$ en $a^3 = a^3ba^3b$ in G . **(2 punten)**
(c) Is G commutatief? Bewijs je antwoord. **(1 punt)**
(d) Is G isomorf met $\mathcal{A}_4$? Bewijs je antwoord. **(1 punt)**

Totaal: 30 punten