Examen Analyse II

Leuven, 29 januari 2016

1. Zij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en definieer $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : F(x, y) = f(x)g(y)$.
   (a) Veronderstel dat f en g afleidbaar zijn in 0. Bewijs dat F totaal afleidbaar is in $(0, 0)$ en geef een formule voor de totale afgeleide $(dF)(0, 0)$.
   (b) Geldt ook het omgekeerde? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
2. In het bewijs van Propositie 4.17 op pagina 132 staat het volgende.
   Helemaal identiek zoals in het bewijs van de stelling van Fejér volgt dan dat
   $$\int_{-\pi}^{pi} ||f_y - f||_1 F_n(y)dy \to 0 \text{ wanneer } n \to \infty.$$
   Geef hiervoor een nauwkeurig argument.
3. Geef een zo groot mogelijk open interval $I \subset \mathbb{R}$ (eventueel onbegrensd) waarop de functie
   $$f(x) = \int_{(0,+\infty)} \frac{\ln(t)}{1 + t^x} dt$$
   goed gedefinieerd en afleidbaar is. Argumenteer nauwkeurig.
4. Zij $\alpha_n > 0$ een rij van strikt positieve reële getallen. Definieer de functie
   $$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{(x - n)^{\alpha_n}} - 1 \text{ wanneer} n \in \mathbb{N} \text{ en } n < x \leq n + 1.$$
   (a) Voor welke rijen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is de functie f integreerbaar? Bewijs je antwoord nauwkeurig.
   (b) Geef een voorbeeld van een rij $\alpha_n > 0$ waarvoor f integreerbaar is. Argumenteer nauwkeurig.
5. Bepaal voor alle integreerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de limiet
   $$lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)|\sin(\lambda x)|dx.$$
   Laat je hiervor inspireren door het Lemma van Riemann-Lesbegue. Bewijs je antwoord nauwkeurig.