Examen
Statistische Mechanica bij Evenwicht
7 September 2012, 8u30

Mondeling te verdedigen met schriftelijke voorbereiding

Ongelijkheid van Bogoliubov

De ongelijkheid van Bogoliubov

$$F \leq F_0 + \langle H_1 \rangle_0 \tag{1}$$

is geldig voor systemen waar de Hamiltoniaan in twee delen te splitsen is: $H = H_0 + H_1$. Leidt de ongelijkheid af en bespreek een toepassing daarvan.

Ideale gassen

Leidt voor een klassiek systeem van N niet-wisselwerkende deeltjes in een volume V en bij temperatuur T de ideale gaswet

$$pV = Nk_BT \tag{2}$$

Leidt af en bespreek mogelijke afwijkingen van deze wet voor ideale kwantum gassen.

Schriftelijk

Diatomische Moleculen

Beschouw een klassiek systeem van N niet-wisselwerkende moleculen in een volume V en bij een temperatuur T. De Hamiltoniaan voor een molecuul is

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2}\right) + \varepsilon\,|r_{12} - r_0| \tag{3}$$

waar ε en r_0 positieve constanten zijn en $r_{12} \equiv \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$. Bereken de inwendige energie en soortelijke warmte c_V.

Gas van elektronen

Beschouw een systeem van N niet-wisselwerkende elektronen met een toestandsdichtheid $g(\varepsilon)$ die een "gap" van breedte Δ vertoont:

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon < 0 \\ \delta & 0 \leq \varepsilon \leq a \\ 0 & a < \varepsilon < a + \Delta \\ \delta & \varepsilon \geq a + \Delta \end{cases} \tag{4}$$

De bezettingswaarschijnlijkheid voor niveau ε wordt gegeven door de Fermi-Dirac distributie $n(\varepsilon) = 1/(1 + e^{\beta(\varepsilon-\mu)})$. Deze functie wordt nu voor lage temperaturen benadert door de functie $\tilde{n}(\varepsilon)$ gegeven in Fig. 1. Er geldt $\tilde{n}(\mu) = 1/2$ en de richtingscoëfficient van de schuine lijn is $-1/4k_BT$. We kiezen $\mu = a + \Delta/2$, d.w.z. midden in de gap.

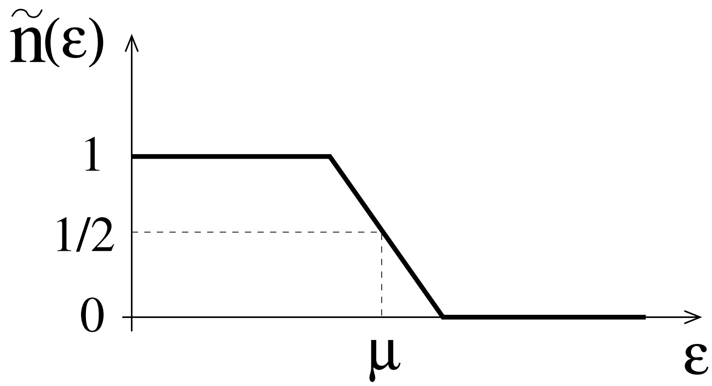

Figure 1:

a) Bereken voor $T = 0$ de inwendige energie E en de druk p.

b) Als we de temperatuur verhogen dan is, in deze benadering, E constant totdat de temperatuur een zekere eindige waarde T_c bereikt. Verklaar dit kort en bereken T_c.

c) In werkelijkheid wordt er geen kritische temperatuur T_c gevonden als er een gap is, maar gedraagt $E(T) - E(0)$ zich voor zeer lage temperaturen als $\exp(-\Delta/K_B T)$ i.p.v. nul. Verklaar dit.

d) **Fakultatief**: Laat zien dat voor $T > T_c$ (en $T - T_c$ klein!) E gegeven wordt door

$$E(T) - E(0) = \delta \left(\frac{\Delta^3}{48 k_B T} - \frac{1}{8}\Delta^2 + \frac{2}{3} k_B^2 T^2 \right) \tag{5}$$

en bereken de soortelijke warmte c_V.