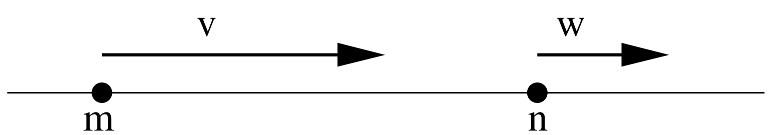
Examen Algemene natuurkunde 1, oplossing

Vraag 1 (6 ptn)

De deeltjes m_1 en m_2 bewegen zich op eenzelfde rechte zoals in de figuur. Ze zitten op ramkoers want $v_1 > v_2$.



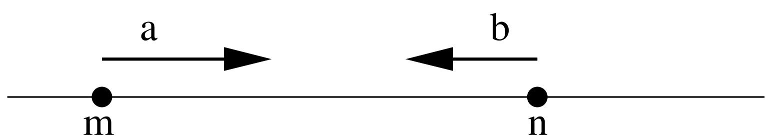
Figuur 1: Twee puntmassa's die zullen botsen

1. Teken, zonder iets te berekenen, een gelijkaardige figuur zoals gezien door een waarnemer W die met het massacentrum van het systeem mee beweegt.
2. Teken, eveneens zonder enige berekening, hoe W de massa's ziet bewegen na een volledig elastische en na een volledig inelastische botsing.
3. Bereken nu voor beide types botsingen de snelheden die W waarneemt voor en na de botsing.

Oplossing

We gebruiken voortdurend dat het totaal impuls gelijk is aan nul in een referentiestelsel dat met de waarnemer W mee beweegt.

1. Omdat voor W het totale impuls gelijk is aan nul en m_1 en m_2 zullen botsen, ziet W de snelheden als volgt:

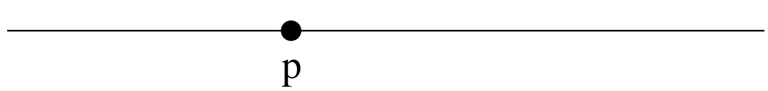


Figuur 2: De snelheden voor de botsing gezien door W

2. Na een elastische botsing verwijderen de deeltjes zich terug van elkaar. Het totale impuls blijft nul. Dit komt overeen met de volgende figuur:

Figuur 3: De snelheden na de botsing gezien door W

Na een volledig inelastische botsing vormen m_1 en m_2 een nieuw deeltje $m_1 + m_2$ dat stil staat voor W omdat er behoud is van totaal impuls.



3. Voor alle duidelijkheid voeren we een eenheidsvector $\hat{\mathbf{i}}$ in, evenwijdig met de rechte waarop de massa's bewegen en gericht volgens de snelheden in figuur 1 (van links naar rechts). We hebben dan

$$\vec{v_1} = v_1\,\hat{\mathbf{i}} \text{ en } \vec{v_2} = v_2\,\hat{\mathbf{i}}$$

met $v_1 > v_2 > 0$.

De snelheid $\overrightarrow{v_{\mathrm{CM}}}$ van het massacentrum (en dus van W) is het gewogen gemiddelde van de snelheden van m_1 en m_2

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{CM}}} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, v_1\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\, v_2\,\hat{\mathbf{i}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}\;\hat{\mathbf{i}}\,.$$

Als een deeltje een snelheid $\vec{v}$ heeft in het oorspronkelijke referentiestelsel dan heeft het een snelheid $\vec{v} - \overrightarrow{v_{\mathrm{CM}}}$ ten opzichte van W. We vinden daarom voor de snelheden $\overrightarrow{u_1}$ en $\overrightarrow{u_2}$ van figuur 2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u_1} &= v_1\,\hat{\mathbf{i}} - \overrightarrow{v_{\mathrm{CM}}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,(v_1 - v_2)\,\hat{\mathbf{i}} \;\text{ en}\\ \overrightarrow{u_2} &= v_2\,\hat{\mathbf{i}} - \overrightarrow{v_{\mathrm{CM}}} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,(v_1 - v_2)\,\hat{\mathbf{i}}\,.\end{aligned}$$

We schrijven de snelheden van de deeltjes na een volledig elastische botsing als

$$\overrightarrow{w_1} = -w_1\,\hat{\mathbf{i}} \;\text{ en }\; \overrightarrow{w_2} = w_2\,\hat{\mathbf{i}}\,,$$

zie figuur 3. Voor een volledig elastische botsing geldt zowel behoud van impuls als behoud van kinetische energie:

$$m_1 w_1 = m_2 w_2 \;\text{ en }\; m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,(v_1 - v_2)^2\,.$$

Elimineren van w_2 uit de eerste vergelijking en invullen in de tweede geeft

$$w_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,(v_1 - v_2) = u_1 \;\text{ en }\; w_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,(v_1 - v_2) = u_2\,.$$

Voor de waarnemer W klappen de twee deeltjes bij een elastische botsing hun snelheden om.

Voor een volledig inelastische botsing gaat in het referentiestelsel van het massamiddelpunt al de kinetische energie verloren.

Vraag 2 (3 ptn)

De beweging van een klein deeltje van massa m in een vloeistof wordt bepaald door

$$m\vec{a} = -\gamma\vec{v} + \vec{F}\,.$$

$\vec{F}$ is de uitwendige kracht die op m inwerkt, deze hangt eventueel van plaats of tijd af. De term $-\gamma\vec{v}$ is de weerstand die het deeltje ondervindt als het door de vloeistof beweegt, de constante γ is bepaald door de vorm en afmeting van het deeltje, door de massadichtheid van de vloeistof en door haar viscositeit. Verder heb je nog beginpositie en -snelheid van m nodig om de beweging volledig te bepalen.

In heel wat situaties is de grootte van ma verwaarloosbaar ten opzichte van de grootte van γv en vereenvoudigt de bewegingsvergelijking tot

$$\gamma\vec{v} = \vec{F}\,.$$

Je hebt dan nog één beginwaarde nodig om de beweging volledig te kennen: de initiële positie van m. (In de benadering die hier gemaakt wordt, dempt de initiële snelheid van m zo snel uit dat ze niet meer meespeelt, men noemt dit dan ook overgedempte beweging.)

1. Bepaal de dimensie van γ.

2. Bepaal de beweging van een overgedempt deeltje voor een periodieke uitwendige kracht
$$\vec{F} = \vec{F_0}\cos(\omega t)\,.$$
Hierbij is $\vec{F_0}$ een constante vector.

3. Hoeveel arbeid verricht een $\vec{F}$ zoals in puntje 2. per tijdseenheid op m? Bereken dit voor een tijdsinterval $[t_0, t_1]$ dat zeer lang is ten opzichte van $1/\omega$. Deze grootheid noemt men het gemiddeld vermogen door de uitwendige kracht in het systeem gedissipeerd.

Oplossing

1. Omdat $[\gamma v] = [\gamma][v] = [F]$ en $[v] = LT^{-1}$ en $[F] = MLT^{-2}$ vinden we $[\gamma] = MT^{-1}$.

2. Stel dat $\vec{r}(t)$ de positie is van het deeltje op tijdstip t dan moeten we bepalen hoe $\vec{r}$ van t afhangt opdat
$$\gamma \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{F_0}\cos(\omega t)\,.$$
We nemen als beginsituatie een positie $\vec{r_0}$ op $t = 0$. We herschrijven de bewegingsvergelijking als
$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{\vec{F_0}}{\gamma}\cos(\omega t)\,.$$
Integreren we deze vergelijking tussen de tijden 0 en t dan vinden we
$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \vec{r}(t) - \vec{r_0} = \frac{\vec{F_0}}{\gamma}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$
of
$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \frac{\vec{F_0}}{\gamma\omega}\,\sin(\omega t)\,.$$
We zien dus dat het deeltje oscilleert rond de positie $\vec{r_0}$ volgens de richting van $\vec{F_0}$. De amplitude van die oscillaties wordt bepaald door F_0, γ en ω.

3. De arbeid $W(t_0, t_1)$ geleverd door de drijvende kracht $\vec{F}$ in het tijdsinterval $[t_0, t_1]$ is gegeven door
$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} dt\,\vec{v}(t)\cdot\vec{F} = \int_{t_0}^{t_1} dt\,\frac{F_0^2}{\gamma}\,\cos^2(\omega t)\,.$$
We gebruiken nu de hoekverdubbelingsformule $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\cos(2\varphi)$ en vinden zo
$$\begin{aligned} W(t_0,t_1) &= \frac{F_0^2}{\gamma}\int_{t_0}^{t_1} dt\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right) \\ &= \frac{F_0^2}{\gamma}\,\frac{(t_1-t_0)}{2} + \frac{F_0^2}{\gamma}\,\frac{\sin(2\omega t_1)-\sin(2\omega t_0)}{4\omega}\,. \end{aligned}$$
Delen we dit nu door $t_1 - t_0$ en nemen we de limiet voor $t_1 - t_0 \to \infty$ dan vinden we voor het gemiddeld vermogen
$$P = \frac{F_0^2}{2\gamma}\,.$$

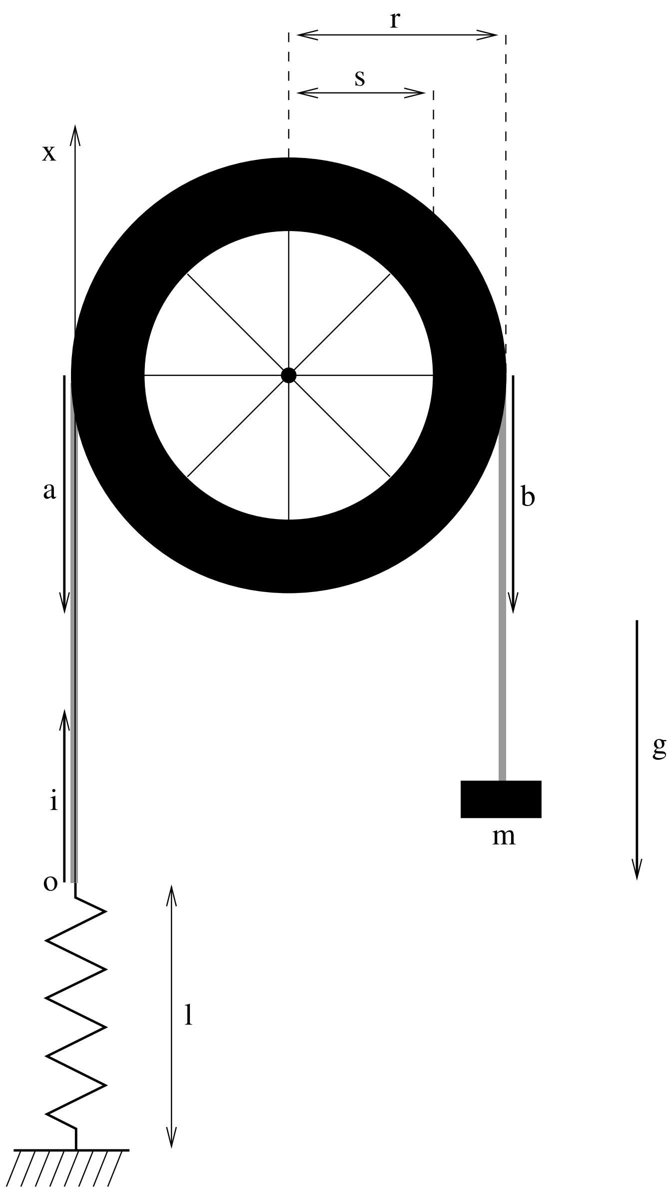
Vraag 3 (6 ptn)

De massa m in de figuur is met een ideaal touw verbonden aan de bovenkant van een ideale veer. De onderkant van de veer is stevig verankerd. Het touw loopt zonder te slippen over een katrol die wrijvingsloos draait om een horizontale as. De veer heeft een rustlengte ℓ_0 en een veerconstante (stijfheid) k. De katrol is een homogene ring van buitenstraal R en binnenstraal $2R/3$ en heeft een massa M. De spaken die de ring met de as verbinden mag je massaloos onderstellen.

1. Bepaal de lengte ℓ_1 van de veer als het systeem in evenwicht is.
2. Toon aan dat het traagheidsmoment van de katrol ten opzichte van de as waarrond ze draait gelijk is aan $13MR^2/18$.

Voer nu een verticale, opwaarts gerichte, x-as in met als oorsprong het bovenste uiteinde van de veer als het systeem in evenwicht is. M.a.w. $x = 0$ indien de veer uitgerekt is tot lengte ℓ_1. De massa zal op en neer oscilleren wanneer ze uit evenwicht gebracht wordt. Daarover gaan de volgende vragen.

3. Schrijf de totale mechanische energie van het systeem op in termen van x en dx/dt.
4. Gebruik behoud van energie om de frequentie ω te bepalen waarmee m op en neer oscilleert als het systeem uit evenwicht gebracht wordt.
5. Stel dat de beweging beschreven wordt door $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ met ω de frequentie die je net gevonden hebt. Waaraan zijn de spankrachten gelijk in het touw links en rechts van de katrol.
6. Verifieer expliciet dat de beweging van de katrol inderdaad bepaald wordt door het netto krachtenmoment van de uitwendige krachten die op de katrol inwerken.



Figuur 4: Het systeem van vraag 3 in evenwicht

Oplossing

1. In evenwicht is de terugroepkracht van de veer precies gelijk aan het gewicht van de massa m

$$k(\ell_1 - \ell_0) = mg \text{ of } \ell_1 = \ell_0 + \frac{mg}{k}\,. \qquad (*)$$

2. Stel dat ρ de oppervlaktemassadichtheid is van de katrol dan is de bijdrage van een dunne ring van straal r en dikte dr tot het traagheidsmoment gelijk aan $2\pi r^3 \rho dr$. Het traagheidsmoment van de katrol is daarom:

$$I = \int_{2R/3}^{R} dr\, 2\pi r^3 \rho = \frac{65}{162}\,\pi\rho R^4\,.$$

We berekenen nog ρ door te stellen dat de katrol een massa M heeft:

$$M = \int_{2R/3}^{R} dr\, 2\pi r \rho = \frac{5}{9}\,\pi\rho R^2\,.$$

Elimineren van ρ geeft dan

$$I = \frac{13}{18}\,MR^2\,.$$

3. De totale mechanische energie is de som van kinetische en potentiële termen. Zowel de beweging van m als van de katrol dragen bij tot de totale kinetische energie. De snelheid van m is $|dx/dt|$ en de hoeksnelheid van de katrol is $1/R$ maal de snelheid van m omdat het touw zonder slippen over de katrol loopt. Zo vinden we

$$E^{\text{kin, tot}} = \frac{1}{2}\,m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{I}{R^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{13}{18}\,M\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

De totale potentiële energie is de som van twee termen: de potentiële energie $\frac{k}{2}(\ell_1 + x - \ell_0)^2$ van de veer uitgerekt tot een lengte $\ell_1 + x$ en de potentiële energie $-mgx$ van de massa m. Let op het teken van de laatste term: hoe groter x, hoe lager m en dus hoe kleiner de potentiële energie van m.

$$E^{\text{pot, tot}} = \frac{k}{2}\,(\ell_1 + x - \ell_0)^2 - mgx = \frac{k}{2}\,x^2 + \frac{m^2 g^2}{2k}\,.$$

We hebben hier $(*)$ gebruikt. Zo vinden we

$$E^{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}\Big(m + \frac{13}{18}\,M\Big)\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \frac{k}{2}\,x^2 + \frac{m^2g^2}{2k}\,.$$

De laatste term is constant en dus irrelevant omdat de potentiële energie toch maar op een constante na bepaald is.

4. We schrijven nu op dat E^{tot} constant is, m.a.w. dat de afgeleide van E^{tot} naar de tijd gelijk is aan nul. Delen we die afgeleide door dx/dt dan vinden we de bewegingsvergelijking

$$\Big(m + \frac{13}{18}\,M\Big)\,\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0\,.$$

Dit is de bewegingsvergelijking van een gewone harmonische oscillator. De overeenstemmende frequentie is gegeven door

$$\omega^2 = \frac{k}{m + 13M/18}\,. \qquad (**)$$

5. Stel dat $\overrightarrow{T_1}$ en $\overrightarrow{T_2}$ de spankrachten zijn in het linker en rechter deel van het touw zoals ze inwerken op de katrol, zie figuur. We schrijven $\overrightarrow{T_1} = -T_1\hat{\mathbf{i}}$ en $\overrightarrow{T_2} = -T_2\hat{\mathbf{i}}$. De kracht $\overrightarrow{T_1}$ balanceert exact de terugroepkracht van de veer:

$$T_1(t) = k(\ell_1 + x(t) - \ell_0) = mg + kx(t)\,.$$

Om $\overrightarrow{T_2}$ te bepalen drukken we uit dat m keer de versnelling van m gelijk is aan de nettokracht die inwerkt op m:

$$-m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\mathbf{i}} = -mg\,\hat{\mathbf{i}} + T_2\,\hat{\mathbf{i}}$$

en dus

$$T_2(t) = mg + m\omega^2 x(t)\,.$$

6. Het impulsmoment van de katrol staat loodrecht op het vlak van de tekening, net als de momenten van de krachten $\overrightarrow{T_1}$ en $\overrightarrow{T_2}$ ten opzichte van de as van de katrol. We schrijven daarom alleen maar de component van $d\overrightarrow{L}/dt = \overrightarrow{\tau}^{\text{ext, tot}}$ op loodrecht op het vlak van de tekening. Dit geeft

$$\frac{I}{R}\,\omega^2 x(t) \stackrel{?}{=} R(T_1(t) - T_2(t)) = R(k - m\omega^2)x(t)$$

wat inderdaad klopt omwille van $(**)$.

Vraag 4 (3 ptn)

Een cilindrische tank van sectie A loopt leeg door een kleine opening van sectie B onderaan de tank. De tank is gevuld met een niet-viskeuze vloeistof van massadichtheid ρ en is oorspronkelijk gevuld tot op hoogte h boven de kleine opening. (Met sectie van een buis wordt de oppervlakte van de dwarsdoorsnede bedoeld.)

1. Hoe snel stroomt de vloeistof uit de opening?
2. Hoe snel daalt het niveau in de tank?
3. Hoelang duurt het vooraleer de tank leeggelopen is?

Voor deze vraag mag je aannemen dat $A \gg B$ wat bijvoorbeeld wil zeggen dat je $A - B$ mag benaderen door A. Je hebt wellicht de wet van Bernoulli nodig die zegt dat in een rustig stromende, onsamendrukbare, niet-viskeuze vloeistof $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$ constant is.

Oplossing

1. De eerste vraag is niets anders dan de formule van Torricelli afleiden. Stel dat de tank tot op niveau x boven de kleine opening onderaan gevuld is. Je maakt dan de volgende benaderingen in de wet van Bernoulli:
   - de stroomsnelheid boven aan de tank is verwaarloosbaar ten opzichte van de uitstroomsnelheid omwille van de continuïteitsvergelijking en $A \gg B$
   - de druk op hoogte x is nagenoeg gelijk aan de druk op niveau van de kleine opening
   Dit leidt tot $\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g x$ met v de uitstroomsnelheid en dus
   $$v = \sqrt{2gx}\,.$$

2. Het niveau in de tank daalt met een snelheid $-dx/dt$, het min teken drukt uit dat het niveau daalt. Omwille van de continuïteitsvergelijking hebben we $-A dx/dt = Bv$ en dus
   $$\frac{dx}{dt} = -\frac{B}{A}\,v = -\frac{B}{A}\,\sqrt{2gx}\,. \qquad (*)$$

3. Om de hoogte in de tank in functie van de tijd te kennen, herschrijven we $(*)$
   $$\frac{d}{dt}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{dx}{dt} = -\frac{B}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\,.$$
   Op tijd $t = 0$ is de tank gevuld tot op hoogte h. Integreren van de vorige vergelijking geeft dan
   $$\sqrt{x(t)} = \sqrt{h} - \frac{B}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t\,.$$
   De tank is daarom leeg op tijd
   $$t_1 = \frac{A}{B}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$