Examen AN I 2021

$\subset$ Wina

23 januari 2021

Noot vooraf: Er was eens een piepklein beestje, corona genaamd, dat heel de standaardregeling van het eerste semester overhoop gooide. De 'Beste studenten' kregen dit jaar slechts drie uur de tijd om het examen in te vullen. Ze mochten wel één vraag kiezen die ze niet moesten oplossen, en die dus ook niet zou meetellen. En de studenten bleven nog lang thuis voor hun computerscherm.

Vraag 1

(a) Geef de definitie voor het traagheidsmoment.

(b) Beschrijf in eigen woorden de betekenis van het woord traagheidsmoment.

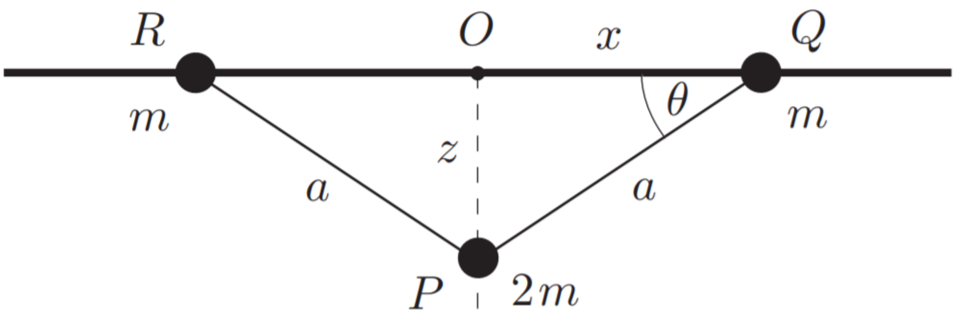
(c) Geef de stelling van Steiner en bewijs.

(d) Gegeven is een homogene schijf van straal R met een rotatieas door het massacentrum en loodrecht op het oppervlak. Bepaal het traagheidsmoment van de schijf.

(e) Beschouw nu diezelfde schijf, maar met een gat in geboord van straal R_1 en middelpunt op een afstand d van onze oorspronkelijke schijf. Bereken ook van deze nieuwe schijf het traagheidsmoment.

Vraag 2

De figuur rechts toont een balletje P met massa $2m$ dat vasthangt met ideale touwtjes (kunnen niet uitrekken) van lengte a aan twee glijders Q en R, elk van massa m, die kunnen bewegen over een gladde horizontale rail. Het systeem beweegt symmetrisch zodat O, het middelpunt van Q en R, vast blijft en P verticaal naar beneden gaat ten opzichte van O. Initieel is het systeem in rust, waarbij de drie deeltjes zich op een rechte lijn bevinden en de touwtjes gespannen zijn. Stel de vergelijking voor behoud van mechanische energie op voor dit systeem, waarbij je de hoek θ als variabele neemt. Wat is de verandering van de hoek θ in functie van de tijd ($d\theta/dt$)?



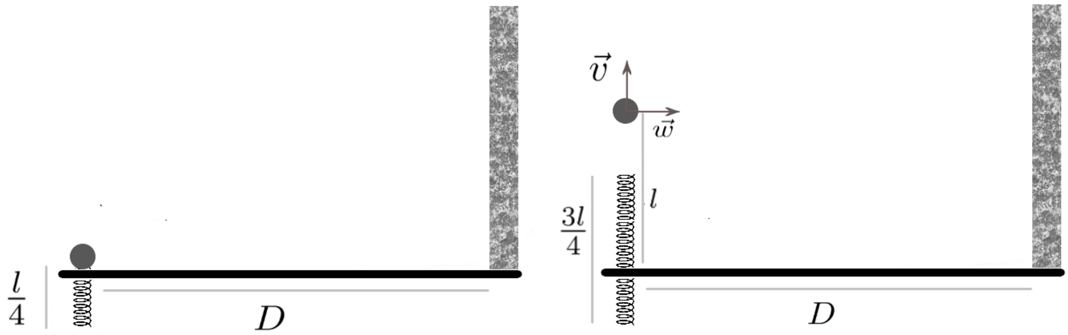
Vraag 3

Stel dat een massa m rust op een veer met veerconstante k en rustlengte $3l/4$. De veer is zo ingedrukt dat ze nog $l/4$ lang is en de massa erboven zich op grondhoogte bevindt. Op een afstand D van de veer met de massa staat er een muur. Gegeven is ook dat er een constante wind waait met snelheid $\vec{w}$ in de richting van de muur vanaf het moment dat de massa zich op hoogte l boven de grond bevindt.

(a) Bepaal de snelheid van de bal op hoogte l.

(b) In de veronderstelling dat de bal de muur zal raken, bepaal dan op welke hoogte de bal de muur zal raken.

(c) Indien er geen windstoot is, dan zal de bal gewoon naar beneden vallen. Stel dat de bal begint te draaien met een constante hoeksnelheid ω en traagheidsmoment I. In dit scenario, bepaal hoever de bal de veer weer zal indrukken. Toon aan dat wanneer $I = 0$, de bal de veer zodanig samenduwt dat de bal zelf terug op grondhoogte zal bevinden.



Vraag 4

Gegeven is een staaf van lengte l die verticaal staat. Op de staaf is een barrière bevestigd op hoogte l_0 waarop een kraal rust. Je mag veronderstellen dat de straal van het kraaltje verwaarloosbaar is ($m_0 << m$). Bij het berekenen van het traagheidsmoment van dit systeem zijn de traagheidsmomenten van de barrière en de kraal verwaarloosbaar. Stel verder dat de staaf valt. De hoek θ is de hoek tussen de staaf en de normaal met het grondvlak.

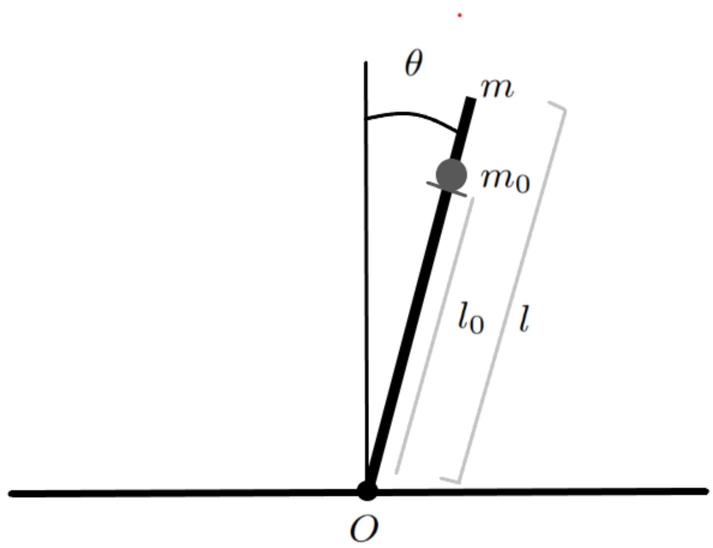
(a) Wat is het traagheidsmoment I van de staaf?

(b) Wat is de hoeksnelheid van de staaf wanneer die onder een hoek θ ten opzichte van de normaal is gevallen?

(c) Wat is de lineaire snelheid van het uiteinde van de staaf onder een hoek θ?

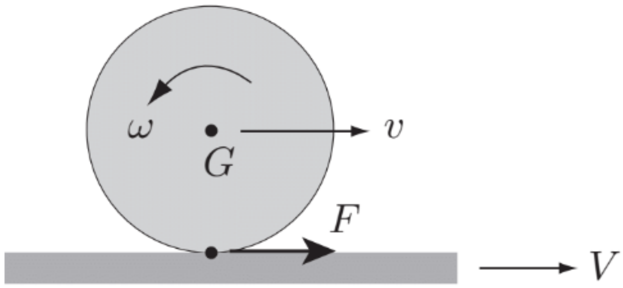
(d) Beschrijf waarom de kraal op $t = t_{krit}$ niet meer tegen de barrière zal rusten.

(e) Wat is de maximale hoek ten opzichte van de normaal $\theta = \theta_{krit}$ waarbij de kraal nog tegen de barrière blijft zitten?



Vraag 5

Een flesje in de supermarkt kunnen we benaderen door een cilinder met traagheidsmoment $I = Mk^2$ (k in lengte eenheden). Bij de kassa wordt de fles op de transportband gelegd met de lengte-as van de fles in een rechte hoek ten opzichte van de bewegingsrichting van de transportband. Oorspronkelijk zijn zowel de fles als de band in rust tot op het moment dat de band begint te bewegen met snelheid $V(t)$. Vind de snelheid $v(t)$ van het massacentrum van de cilinder onder aanname dat de cilinder *niet slipt*.



Eindoplossingen

Dit zijn *vermoedelijke/mogelijke* eindoplossingen, maar er kunnen altijd foutjes inzitten. Het is vooral belangrijk dat je goed uitlegt wat je doet want daar krijg je al punten voor (Mag ik BvE, BvI toepassen?, ...).

1. Deze volledige vraag was letterlijk in de les behandeld.
   (a) $I = \int_0^M |\hat{\omega} \times \vec{r}|^2 dm$ (leg alle parameters uit met tekening)
   (b) /
   (c) $I_0 = I_{cm} + d^2 M$ (zie cursus)
   (d) $I_{cm} = \frac{MR^2}{2}$
   (e) $I_{gat} = \frac{M}{2}(R^2 + R_1^2 - \frac{2d^2R_1^2}{R^2 - R_1^2})$ met M de massa van de schijf met gat.
2. Zie Gregory Example 9.5 in het handboek.
3. (a) $v_{tot} = \sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{l(\frac{lk}{4m} - 2g) + w^2}$ (BvE)
   (b) $h = l + \frac{D}{w}\sqrt{l(\frac{lk}{4m} - 2g)} - \frac{gD^2}{2w^2}$ (Gebruik de kinematische vergelijkingen)
   (c) *Dees is een twijfelgeval:* $x = \frac{mg}{k} + \sqrt{(\frac{mg}{k})^2 - \frac{mgl}{k} + \frac{l^2}{4} - \frac{I\omega^2}{k}}$. Dit antwoord gaat ervan uit dat de bal de rotationele energie krijgt tijdens zijn val. Je stelt dus $E_{rot} = 0$ bovenaan en onderaan $E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}$. Het is *(denk ik)* het positieve antwoord omdat op het laagste punt $F_v > F_z$ dus $kx > mg$. Een andere mogelijke interpretatie is dat de bal bovenaan op magische wijze rotationele energie krijgt. Dan stel je bovenaan $E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}$ en onderaan $E_{rot} = 0$.
4. (a) $I = \frac{ml^2}{3}$
   (b) $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos(\theta))}$. Je kan deze vraag op twee manieren aanpakken: ofwel met behoud van energie, ofwel met de rotationele versie van Newton II rond O en vervolgens vermenigvuldigen met $\frac{d\theta}{dt}$.
   (c) $v_{lin} = l\omega = \sqrt{3lg(1 - \cos(\theta))}$
   (d) Bekijk de rest van de oefening in een roterend stelsel $\{O, \hat{r}, \hat{\theta}\}$. De versnelling volgens de $\hat{r}$-component wordt dus gegeven door $a_{\hat{r}} = \ddot{r} - r\omega^2$. Wanneer de kraal op het plaatje rust, maakt hij een ECB met de centripetale versnelling $a_{\hat{r}} = -l_0\omega^2$ die wordt geleverd door de som van $\vec{F}_n$ en $\vec{F}_{z,\hat{r}}$. Bij een bepaalde hoek θ_{krit} is de hoeksnelheid uit de vorige deelvraag te groot, d.w.z. dat de zwaartekracht en de normaalkracht samen geen centripetale versnelling ter grote van $-l_0\omega^2$ kunnen leveren. Daarvoor zou de normaalkracht namelijk negatief moeten zijn. Om ervoor te zorgen dat de versnellingen voor de $\hat{r}$-component toch kloppen, zal straal van de beweging van de kraal vergroten. Zo is $\ddot{r} > 0$ en kloppen de vergelijkingen.
   (e) $\theta_{krit} = \arccos\left(\frac{3l_0}{l + 3l_0}\right)$. Uit d) weten we dat we op zoek moeten naar θ waarvoor F_n net niet negatief is, ofwel nul. Pas Newton II toe in het roterend assenstelsel (dus $a_{\hat{r}} = \ddot{r} - r\omega^2 = -l_0\omega^2$) met $F_n = 0$, zodat $-m_0 l_0 \omega^2 = -m_0 g \cos(\theta)$. Vul ω uit b) daarin in en vind θ_{krit}.
5. Zie Gregory oefening 11.15 in de oplossleutel op de Dropbox. *Deze vraag is al meermaals op een examen gesteld.*


EiNDE