Examen algebraïsche structuren

19 augustus 2014

Theorie

1 a) Geef en bewijs de Chinese reststelling.
b) (bijvraag) Heeft het volgende stelsel een oplossing ?

$$\begin{cases} x \equiv 6 \mod 12 \\ x \equiv 12 \mod 15 \end{cases}$$

2 a) Geef en bewijs de Stelling van Sylvester.
b) (bijvraag) Geldt deze stelling ook wanneer we werken met $\mathbb{Q}$ in plaats van met $\mathbb{R}$? Beargumenteer kort je antwoord.

Oefeningen

3 a) Kan een groep gelijk zijn aan de unie van twee echte deelgroepen ?
b) Kan een groep gelijk zijn aan de unie van drie echte deelgroepen ?
(Verduidelijking : een echte deelgroep van een groep G is een deelgroep die niet gelijk is aan G)

4 a) Zij p een oneven priemgetal en $n \in \mathbb{N}$ zodat $p|n^2 + 1$. Toon aan dat $p \equiv 1 \mod 4$.
(Hint : Wat is de orde van $[n]_p$ in $Z_p^\times$?)
b) -Vraag vergeten-

5 Zij K een veld en zij l_1, l_2 en $l_3 \in V^*$ gedefineerd als volgt :

$$l_1 : K^3 \to K : (x, y, z) \mapsto x + y - z$$
$$l_2 : K^3 \to K : (x, y, z) \mapsto x + z - y$$
$$l_3 : K^3 \to K : (x, y, z) \mapsto y + z - x$$

a) Toon aan dat $\{l_1, l_2, l_3\}$ geen basis is van V^* indien de karakteristiek van K gelijk is aan 2.

– Stel vanaf nu dat de karaksteristiek van $K \neq 2$ –

b) Vind een basis $\mathcal{B}$ van V zodat $\mathcal{B}^* = \{l_1, l_2, l_3\}$ een basis van V^* is.
c) Definieer volgende afbeelding $l \in V^*$

$$l : K^3 \to K : (x, y, z) \mapsto x$$

Zoek de coordinaten van l t.o.v. de basis $\{l_1, l_2, l_3\}$.