

Vraag 3 (20p). Zij K een veld. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte over K , met duale ruimte V^* . Zij $W = V \oplus V^*$. Definieer

$$\varphi : W \times W \rightarrow K : ((v_1, \ell_1), (v_2, \ell_2)) \mapsto \ell_2(v_1) - \ell_1(v_2).$$

- (a) (6p) Toon aan dat φ een bilineaire vorm op W is.

OPLOSSING. Kies $\lambda, \mu \in K$ en $w_1 = (v_1, \ell_1), w_2 = (v_2, \ell_2), w_3 = (v_3, \ell_3) \in W$ (met $v_i \in V$ en $\ell_i \in V^*$ voor alle i). Dan geldt (wegens de lineariteit van ℓ_3 en de definitie van $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda w_1 + \mu w_2, w_3) &= \varphi((\lambda v_1 + \mu v_2, \lambda \ell_1 + \mu \ell_2), (v_3, \ell_3)) \\ &= \ell_3(\lambda v_1 + \mu v_2) - (\lambda \ell_1 + \mu \ell_2)(v_3) \\ &= \lambda \ell_3(v_1) + \mu \ell_3(v_2) - \lambda \ell_1(v_3) - \mu \ell_2(v_3) \\ &= \lambda(\ell_3(v_1) - \ell_1(v_3)) + \mu(\ell_3(v_2) - \ell_2(v_3)) \\ &= \lambda \varphi(w_1, w_3) + \mu \varphi(w_2, w_3) \end{aligned}$$

en analoog $\varphi(w_1, \lambda w_2 + \mu w_3) = \lambda \varphi(w_1, w_2) + \mu \varphi(w_1, w_3)$. Bijgevolg is φ inderdaad een bilineaire vorm.

- (b) (3p) Verifieer dat de bilineaire vorm φ anti-symmetrisch is, of nog: $\varphi(w_1, w_2) = -\varphi(w_2, w_1)$ voor alle $w_1, w_2 \in W$. Wat kan je hieruit concluderen over de Gram-matrix van φ ten opzichte van een willekeurige basis van W ?

OPLOSSING. Kies $w_1 = (v_1, \ell_1), w_2 = (v_2, \ell_2) \in W$, met $v_i \in V$ en $\ell_i \in V^*$ voor alle i . Dan is

$$\varphi(w_1, w_2) = \ell_2(v_1) - \ell_1(v_2) = -(\ell_1(v_2) - \ell_2(v_1)) = -\varphi(w_2, w_1).$$

Bijgevolg is de Gram-matrix A van φ ten opzichte van een willekeurige basis van W anti-symmetrisch: $A = -A^T$.

- (c) (5p) Toon aan dat de bilineaire vorm φ niet-ontaard is.

OPLOSSING. Stel dat $w_1 = (v_1, \ell_1)$ in het radicaal van de vorm φ zit, of nog, dat $\varphi(w_1, w_2) = 0$ voor alle $w_2 \in W$. We moeten aantonen dat $w_1 = 0$. Kies eerst $w_2 = (0, \ell_2)$ met $\ell_2 \in V^*$ willekeurig. Dan volgt uit $\varphi(w_1, w_2) = 0$ direct dat $\ell_2(v_1) = 0$. Omdat ℓ_2 willekeurig gekozen was, concluderen we dat $v_1 = 0$. Inderdaad, kies een basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ van V , en kies achtereenvolgens $\ell_2 = b_1^*, \dots, \ell_2 = b_n^*$, dan zal $v_1 = \sum_{i=1}^n b_i^*(v_1)b_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot b_i = 0$. Kies vervolgens $w_2 = (v_2, 0)$ met $v_2 \in V$ willekeurig, dan volgt uit $\varphi(w_1, w_2) = 0$ direct dat $\ell_1(v_2) = 0$. Omdat v_2 willekeurig gekozen was, volgt hieruit dat $\ell_1 = 0$. Inderdaad, als $v_2 \neq 0$, dan is v_2 zeker deel van een basis van V . Kies ℓ_1 nu gelijk aan het bijhorende element van de duale basis; dan is $\ell_1(v_2) = 1 \neq 0$, contradictie. We concluderen dat $v_1 = 0$ en $\ell_1 = 0$, of nog, $w_1 = 0$.

- (d) (6p) Zij $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ een basis voor V , en zij $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ de duale basis voor V^* . Dan is

$$\mathcal{W} = \{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0), (0, v_1^*), (0, v_2^*), \dots, (0, v_n^*)\}$$

een basis voor W . Bepaal de Gram-matrix van φ ten opzichte van $\mathcal{W}$.

OPLOSSING. Merk alvast op dat $\varphi((v_i, 0), (v_j, 0)) = 0(v_i) - 0(v_j) = 0$ en $\varphi((0, v_i^*), (0, v_j^*)) = v_i^*(0) - v_j^*(0) = 0$ voor alle i, j . Bovendien is $\varphi((v_i, 0), (0, v_j^*)) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$, met δ_{ij} de Kronecker-delta: $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$. Analoog zien we dat $\varphi((0, v_i^*), (v_j, 0)) = -v_i^*(v_j) = -\delta_{ij}$. Door al deze informatie samen te plaatsen in een matrix zien we dat we dat de Gram-matrix een $(2n \times 2n)$ -blokmatrix van de volgende vorm wordt:

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

met I_n de $(n \times n)$ -eenheidsmatrix en 0_n de $(n \times n)$ -nulmatrix.

Vraag 4 (15p).

- (a) (2p) Bepaal de orde van de groep $G = \mathbb{Z}_{20}^\times$.

OPLOSSING. De groep G heeft orde $\varphi(20) = \varphi(2^2 \cdot 5) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5) = (2-1) \cdot 2^{2-1} \cdot (5-1) \cdot 5^{1-1} = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$. De elementen van G zijn de volgende restklassen modulo 20: $[1]_{20}, [3]_{20}, [7]_{20}, [9]_{20}, [11]_{20}, [13]_{20}, [17]_{20}, [19]_{20}$.

- (b) (6p) Toon aan dat $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow G : (m, n) \mapsto [11]_{20}^m \cdot [13]_{20}^n$ een surjectief homomorfisme van groepen is.
 OPLOSSING. Controleren dat f een groephomomorfisme is doen we door te verifiëren dat

$$f((m_1, n_1) + (m_2, n_2)) = f(m_1, n_1) \cdot f(m_2, n_2)$$

voor alle $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Merk op: de bewerking op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is de (componentsgewijze) optelling en de notatie is bijgevolg additief; de bewerking op $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ is de vermenigvuldiging en de notatie is dus multiplicatief. Nu geldt:

$$\begin{aligned} f((m_1, n_1) + (m_2, n_2)) &= f(m_1 + m_2, n_1 + n_2) \\ &= [11]_{20}^{m_1+m_2} \cdot [13]_{20}^{n_1+n_2} \\ &= ([11]_{20}^{m_1} \cdot [13]_{20}^{n_1}) \cdot ([11]_{20}^{m_2} \cdot [13]_{20}^{n_2}) \\ &= f(m_1, n_1) \cdot f(m_2, n_2). \end{aligned}$$

Het beeld van f bevat alle machten van $[13]_{20}$: $[13]_{20}$, $[13]_{20}^2 = [169]_{20} = [9]_{20}$, $[13]_{20}^3 = [13]_{20} \cdot [13]_{20}^2 = [13]_{20} \cdot [9]_{20} = [117]_{20} = [17]_{20}$ en $[13]_{20}^4 = ([13]_{20}^2)^2 = [9]_{20}^2 = [81]_{20} = [1]_{20}$. Aangezien het beeld zeker gesloten is onder vermenigvuldiging, vinden we in het beeld ook $[11]_{20}$, $[13]_{20} \cdot [11]_{20} = [143]_{20} = [3]_{20}$, $[9]_{20} \cdot [11]_{20} = [99]_{20} = [19]_{20}$ en $[17]_{20} \cdot [11]_{20} = [187]_{20} = [7]_{20}$. Daarmee hebben we alle elementen van G gehad. Bijgevolg is f surjectief.

- (c) (4p) Toon aan dat de kern van f gelijk is aan $2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$. (Hint: begin met de eenvoudigere inclusie $2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z} \subseteq \ker f$.)
 OPLOSSING. Omdat $[11]_{20}^2 = [1]_{20}$ geldt dat $(2m, 0) \in \ker f$ voor alle $m \in \mathbb{Z}$. Omdat $[13]_{20}^4 = [9]_{20}^2 = [1]_{20}$ geldt ook dat $(0, 4n) \in \ker f$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Bijgevolg moet $2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z} \subseteq \ker f$. We beweren dat deze inclusie een gelijkheid is. Stel $f(m, n) = [1]_{20}$, dan $[11]_{20}^m = [13]_{20}^{-n}$. Maar de enige machten van $[11]_{20}$ zijn $[11]_{20}$ zelf en $[1]_{20}$, en $[11]_{20}$ is geen macht van $[13]_{20}$ (want de enige machten van $[13]_{20}$ zijn $[13]_{20}$ zelf, $[9]_{20}$, $[17]_{20}$ en $[1]_{20}$). Dus $[11]_{20}^m = [13]_{20}^{-n} = [1]_{20}$, en dat gebeurt precies wanneer $2 \mid m$ en $4 \mid n$, zodat $\ker f \subseteq 2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$. We concluderen dat $\ker f = 2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$.
- (d) (3p) Bewijs tenslotte dat $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, door gebruik te maken van de eerste isomorfismestelling.
 OPLOSSING. Merk op dat de groepen in kwestie commutatief zijn. Volgens de eerste isomorfismestelling weten we dat $\text{im}(f) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (\ker(f))$. Omdat $\text{im}(f) = G$ (f is surjectief) en $\ker(f) = 2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ zal $G \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z})$. Het resultaat volgt nu uit het isomorfisme

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

dat we bekomen door de nevenklasse $(m, n) + (2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z})$ naar het element $([m]_2, [n]_4)$ te sturen.

Vraag 5 (15p).

- (a) (3p) Zij G een groep zodat voor alle $x, y \in G$ geldt dat $(xy)^2 = x^2y^2$. Toon aan dat G noodzakelijk commutatief is.
 OPLOSSING. Kies $x, y \in G$ willekeurig, dan volgt uit $(xy)^2 = x^2y^2$ dat $xyxy = xxyy$. Door aan de linkerkant van beide leden de schrappingswet toe te passen – of nog, door langs links te vermenigvuldigen met x^{-1} – volgt dat $yxy = xyy$. Door op eenzelfde manier aan de rechterkant de schrappingswet toe te passen – of nog, door langs rechts te vermenigvuldigen met y^{-1} – volgt dat $yx = xy$. Bijgevolg is G commutatief, want x en y waren willekeurig gekozen.
- (b) We tonen nu aan dat uit de alternatieve eis dat $(xy)^3 = x^3y^3$ voor alle elementen x, y van een groep G niet altijd volgt dat G commutatief is. Bekijk daarvoor de volgende verzameling van (3×3) -matrices over het veld $\mathbb{Z}_3$ met 3 elementen:

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_3 \right\};$$

hierbij is $\bar{0} = [0]_3$ en $\bar{1} = [1]_3$.

- (b1) (5p) Bewijs in detail dat $\mathcal{H}_3$ een groep is voor de matrixvermenigvuldiging.

OPLOSSING. Het product van twee elementen van $\mathcal{H}_3$ is opnieuw een element van $\mathcal{H}_3$:

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} & \delta & \epsilon \\ \bar{0} & \bar{1} & \eta \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha + \delta & \beta + \epsilon + \alpha\eta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma + \eta \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

dus de matrixvermenigvuldiging is een inwendige binaire bewerking. Deze bewerking is zeker associatief, want de vermenigvuldiging van matrices is associatief in het algemeen, en de eenheidsmatrix I_3 is om evidente redenen

een neutraal element voor de vermenigvuldiging. Bovendien is elk element van $\mathcal{H}_3$ inverseerbaar:

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & -\alpha & -\beta + \alpha\gamma \\ \bar{0} & \bar{1} & -\gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

is een tweezijdige inverse voor de matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Bijgevolg voldoet $\mathcal{H}_3$ aan alle voorwaarden uit de definitie van een groep.

- (b2) (1p) Geef (zonder verantwoording) de orde van deze eindige groep.

OPLOSSING. De orde van $\mathcal{H}_3$ is $3^3 = 27$, want voor α, β en γ zijn er telkens drie mogelijkheden in $\mathbb{Z}_3$.

- (b3) (2p) Toon vervolgens aan dat $\mathcal{H}_3$ niet commutatief is.

OPLOSSING. We zien bijvoorbeeld dat

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

- (b4) (4p) Bewijs tenslotte dat $(xy)^3 = x^3y^3$ voor alle $x, y \in \mathcal{H}_3$.

OPLOSSING. Het volstaat om aan te tonen dat $x^3 = I_3$ voor elke $x \in \mathcal{H}_3$; daaruit volgt het resultaat onmiddellijk. Welnu,

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & 2\alpha & 2\beta + \alpha\gamma \\ \bar{0} & \bar{1} & 2\gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{1} & 2\alpha & 2\beta + \alpha\gamma \\ \bar{0} & \bar{1} & 2\gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{1} & 3\alpha & 3\beta + 3\alpha\gamma \\ \bar{0} & \bar{1} & 3\gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

waarbij de gelijkheden $3\alpha = 3\beta + 3\alpha\gamma = 3\gamma = \bar{0}$ volgen uit het feit dat $\mathbb{Z}_3$ karakteristiek 3 heeft.