Examen algebraïsche structuren

26 juni 2014

Theorie

$\boxed{\mathbf{1}}$ a) Bewijs dat elke cyclische groep isomorf is met $\mathbb{Z},+$ of $\mathbb{Z}_n,+$
b) (bijvraag) Geef alle deelgroepen van $\mathbb{Z}_{12},+$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Zij K een veld dat niet van karakteristiek 2 is en zij V een eindigdimensionale symmetrische bilineaire ruimte (met de vorm $\langle\cdot,\cdot\rangle$) over K. Bewijs dat er een basis $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ van V bestaat zodat de matrix van $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ten opzichte van $\mathcal{V}$ een diagonaalmatrix is.

Oefeningen

$\boxed{\mathbf{3}}$ Zij $m = 2013^{2014} + 2014^{2013}$. Toon aan dat $[m]_{280}$ tot $\mathbb{Z}_{280}^{\times}$ behoort. Geef ook het aantal elementen van $\mathbb{Z}_{280}^{\times}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Zij $G,*$ een groep. Zij $\Delta = \{(g,g)|g \in G\}$ een deelgroep van $(G \times G)$. Toon aan dat de quotientgroep $(G \times G)/\Delta$ isomorf is met G.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Zij V een eindigdimensionale bilineaire vectorruimte over K met dimensie n en vorm $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Beschouw de vectorruimte $W = V \oplus V^*$ en beschouw $\varphi : W \times W \to K : ((v,l),(v',l')) \mapsto l'(v) - l(v')$.
a) Toon aan dat φ een bilineaire vorm is en dat deze vorm niet ontaard is.
b) Toon aan dat er een basis $\mathcal{W}$ van W bestaat zodat de Gram-matrix van φ t.o.v. $\mathcal{W}$ van de vorm

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

is waarbij 0_n voor de $n \times n$-nulmatrix staat en I_n voor de $n \times n$-eenheidsmatrix.