

Examen Algebra I

15 Januari 2024

opmerking: Er stond bovenaan het examen dat elk antwoord en elke niet-triviale stap in je antwoord verantwoord moest worden.

1 Theorie

1.1 Vraag 1

- (a) Formuleer en bewijs het delingsalgoritme voor veeltermen over een ring met eenheidselement.
- (b) Is het nodig dat we in een ring met eenheidselement werken? Geef de stappen in het bewijs aan waar je dit gebruikt.

1.2 Vraag 2

In de volgende vraag zijn F en U velden en geldt dat $F \subseteq U$.

- (a) Bewijs dat als a algebraïsch is over F , dat $[F(a):F]$ eindig is en stel een basis op voor $F(a)$ (beargumenteer ook waarom het een basis is)
- (b) Formuleer het begrip “algebraïsche uitbreiding”
- (c) Waar of niet waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld. Als F algebraïsch is over U , dan is $[U:F]$ eindig.

2 Oefeningen

2.1 Vraag 1

Een groep G is metabels als en slecht als G een normale deelgroep heeft zodat N abels is en G/N abels is. Bewijs de volgende stellingen:

1. Elke deelgroep van een metabelse groep is metabels
2. Elk quotient van een metabelse groep is metabels
3. G is metabels als en slechts als G'' de triviale groep is.

2.2 Vraag 2

Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. R is een HID en geen veld, en heeft een uniek maximaal ideaal
2. R is een HID en heeft een uniek priemideaal dat niet nul is.
3. R is een UFD en geen veld, zodat elke 2 irreducibele elementen geassocieerd zijn.

2.3 Vraag 3

Beschouw de volgende veeltermen over $\mathbb{F}_2$: $f = X^5 + X^2 + 1$ en $g = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

- (a) Beantwoord voor beide veeltermen of ze irreducibel zijn. Als er een reductibel zou zijn, schrijf ze dan als factorisatie in irreducibele factoren.
- (b) Hoeveel wortels hebben f en g in $\mathbb{F}_{32}$ en $\mathbb{F}_{256}$.

2.4 Vraag 4

Bepaal de matrix P zodat PAP^{-1} een jordanmatrix is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$