

Examen Algebra II - 26 juni 2024

- Leg je antwoorden helder uit en geef duidelijk aan welke resultaten je gebruikt. Als je een resultaat gebruikt uit de oefenzittingen, moet je dit ook bewijzen.
- Dit examen bestaat uit **vier vragen**, genummerd van (1) tot en met (4), opgesplitst in verschillende deelvragen. **Elk van de vier vragen moet op een apart blad worden beantwoord.** Vergeet niet om op elk antwoordblad je naam te schrijven, en de bladen te nummeren. Je kladpapier hoeft je **niet** in te dienen.
- Zelfs als je een onderdeel van een oefening niet kan oplossen, mag je het resultaat gebruiken in het vervolg van de oefening.
- Het examen is open boek, je mag gebruik maken van de cursustekst voor Algebra II en je persoonlijke notities. Je mag ook de cursustekst voor Algebra I gebruiken, maar **geen** oplossingen van oefeningen en **geen** andere bronnen.
- Je hebt voor dit examen 4 **uur** de tijd (5 uur en 20 minuten voor studenten met faciliteiten). **Adem eens diep in, je kan dit! Veel succes!**

1. Zij K een veld, en zij $K \subset L$ en $L \subset E$ eindige velduitbreidingen.
 - (a) Veronderstel dat L een ontbindingsveld is over K . Toon aan dat $\sigma(L) \subset L$ voor elk homomorfisme $\sigma: L \rightarrow E$ over K . **(2 punten)**
 - (b) Veronderstel dat L een ontbindingsveld is over K . Zij $g(x)$ een irreducibele veelterm in $K[x]$ met een wortel α in L . Zij β een wortel van $g(x)$ in E . Toon aan dat $\beta \in L$. **(2 punten)**
 - (c) Bewijs dat L normaal is over K als en slechts als L een ontbindingsveld is over K . **(4 punten)**
2. In deze oefening mag je vrij gebruik maken van de volgende eigenschap.

Eigenschap. Zij G een groep, en zij N een normale deelgroep van G . Dan is G oplosbaar als en slechts als N en G/N oplosbaar zijn.

- (a) Zij p een priemgetal, en zij G een eindige p -groep. Toon aan dat G oplosbaar is. **(2 punten)**

Zij nu K een veld, en zij $K \subset E$ een Galoisuitbreiding van graad $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.

- (b) Toon aan dat er een strikt tussenveld $K \subsetneq L \subsetneq E$ bestaat zodat L Galois is over K . **(2 punten)**
- (c) Veronderstel dat K karakteristiek 0 heeft. Toon aan dat er een eindige uitbreiding $E \subset E'$ bestaat zodat E' radicaal is over K . **(4 punten)**

3. We definiëren een groep G door middel van de presentatie

$$G = \langle s, t \mid s^3, t^3, (st)^2 \rangle.$$

- (a) Zij H de deelverzameling van G die bestaat uit de elementen $1, st, ts$ en st^2s . Toon aan dat H een normale deelgroep is van G . **(3 punten)**
 - (b) Toon aan dat $\#(G/H) \leq 3$. **(2 punten)**
 - (c) Construeer een trouwe groepsactie van G op $\{1, 2, 3, 4\}$ en bewijs je antwoord. Leid hieruit af dat $\#G = 12$. **(4 punten)**
 - (d) Is G isomorf met de diëdergroep D_6 van orde 12? Bewijs je antwoord. **(1 punt)**
4. Zij $G = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ en stel $a = [1]_3$ en $b = [1]_4$. Zij H de deelgroep van G voortgebracht door ab en ba . Toon aan dat H een vrije groep is van rang 2. **(4 punten)**

Totaal: 30 punten