Algebra I

(28/08/2012 (13u-18u))

Theorie

$\boxed{1}$ *Schriftelijk.*
Zij $G, *$ een groep en N een normaaldeler van G. Geef de definitie van de quotiëntbewerking $\overline{*}$ op G/N. Bewijs dat dit de goede definitie is en dat $G/N, \overline{*}$ een groep is.

$\boxed{2}$ *Mondeling.*
Zij R een HID en $x \in R$ met $x \neq 0$ en x geen eenheid. Bewijs dat x te schrijven is als een product van irreducibele elementen.
Hints:

- *Een contradictie.*
- *Een stijgende keten van idealen kan nuttig zijn.*

$\boxed{3}$ *Mondeling.*
Zij $K \subset E$ een velduitbreiding en $a, b \in E$ algebraïsch over K. Bewijs dat $a \cdot b$ algebraïsch is over K.

Snelheidsvraagjes.

1. *Zij $K \subset E$ een velduitbreiding en $a, b \in E$ transcendent over K. Is $a \cdot b$ dan ook transcendent over K?*
2. *Bespreek de inclusies tussen de volgende verzamelingen van $\mathbb{C}^{n \times n}$-matrices:*

diagonaliseerbaar unitair normaal Hermitisch.

Oefeningen

$\boxed{1}$ Zij p een priemgetal.

1. Zij H een abelse groep van orde n en p een priemfactor van n. Maak gebruik van de structuurstelling voor eindige groepen om aan te tonen dat H een element van orde p heeft.
2. Zij $G, *$ een groep met orde p^r, $r \neq 0$.
   (a) Toon aan met behulp van (a) dat er een element $g \in G$ bestaat met $orde\,(g) = p$ en $\langle g \rangle \triangleleft G$.
   (b) Toon met inductie op r aan dat er voor alle s, met $0 \leq s \leq r$, er een normaaldeler N in G bestaat met $|N| = p^s$.

$\boxed{2}$ Zij R een commutatieve ring met $1 \neq 0$ zo dat voor alle $a \in R$ er een $b \in R$ bestaat zo dat $a^2 b = a$. Toon aan dat elk priemideaal van R ook een maximaal ideaal van R is.

$\boxed{3}$ 1. Bereken $[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}\right) : \mathbb{Q}]$.

2. Beschouw het veld $\mathbb{Q}(\omega_3, \omega_7)$. Volgens de stelling van het primitieve element bestaat er een $\alpha \in \mathbb{Q}(\omega_3, \omega_7)$ zo dat $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\omega_3, \omega_7)$.
   (a) Zoek zo'n α.
   (b) Bereken $[\mathbb{Q}(\omega_3, \omega_7) : \mathbb{Q}]$.
   (c) Wat is de minimale veelterm van ω_7 over $\mathbb{Q}(\omega_3)$?
3. Bereken $\mathbb{F}_2(\alpha, \beta)$, waarbij α en β elementen zijn van een uitbreiding L van $\mathbb{F}_2$ met $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$ en $\beta^2 + \beta + 1 = 0$.

$\boxed{4}$ Gegeven de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{C}$.
Bepaal de Jordanvorm J van A en geef P zo dat $J = P^{-1}AP$. Geef ook de karakteristieke veelterm en de minimale veelterm van $\mathcal{A}$.