# Examen 28 januari 2021

Professor Veys

28 januari 2021

*! Let op: dit examen was tijdens corona. Hierdoor was het volledig open boek.*

## 1 Theorie

### 1.1 Vraag 1

Geef met behulp van de relevante structuurstelling alle verschillende commutatieve groepen (op isomorfisme na) van 36 elementen. Leg uit waarom die groepen onderling niet isomorf zijn en waarom de lijst volledig is.

### 1.2 Vraag 2

Veralgemeen lemma 2.4.19 tot een concreet bewijs, met $R$ een domein waarin elk ideaal eindig voortgebracht is. Met andere woorden bewijs het volgende:
Zij $I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_k \subset ...$ een keten van idealen in $R$. Dan bestaat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor $I_k = I_n$ voor alle $n \geq k$. Vergeet niet te verifiëren dat I een ideaal is.

## 2 Oefeningen

### 2.1 Vraag 1

Zij $G, \cdot$ een groep, met $A$ en $B$ normale deelgroepen van $G$ met $B \subsetneq A$. Stel $B \triangleleft A$, en stel $[A : B] = 2$.

**a)** Zij $a \in A \setminus B$ en $g \in G$ willekeurig. Bewijs $gag^{-1}B = aB$.

**b)** Stel $G/A$ cyclisch. Toon aan dat $G/B$ commutatief is.
*Hint (was gegeven): je kan volgende algemene eigenschap gebruiken (zie opmerking na Stelling 1.4.15): Zij $G, \cdot$ een groep en $H$ een deelgroep van $Z(G)$ zodat $G/H$ cyclisch is. Dan is $G$ commutatief.*

## 2.2 Vraag 2

**a)** Zij $F$ een velduitbreiding van $\mathbb{Q}$ en $\varphi : F \to F$ een veldmorfisme. Toon aan dat $\varphi(x) = x$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$.

**b)** Beschouw $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2021})$. Bepaal alle veldisomorfismen $\varphi : F \to F$. Als je beweert dat $\varphi$ een veld isomorfisme is moet je dit ook zorgvuldig aantonen.

## 2.3 Vraag 3

Gegeven $A$, bepaal de inverteerbare matrix $P$ zodat $J = P^{-1}AP$ een jordan vorm is, bepaal ook $J$ en de minimale veelterm.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Gegeven zijn ook:

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 36 \end{pmatrix} \quad (A+I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -108 & 0 & 216 \end{pmatrix}$$