

Herexamen Algebra I

30 augustus 2024

1 Theorie

Hier de theorie die je moest kennen om alle punten op de theorie te halen.

1.1 Groepentheorie

Als eerste werd er gevraagd om stelling 1.3.10 (p26) te bewijzen, dus dan is het handig om definitie 1.3.4, 1.3.8, eigenschap 1.3.9 en stelling 1.3.10 te kennen. Als tweede werd er gevraagd om de klassevergelijking (stelling 1.3.12 p27) te geven en te bewijzen.

1.2 Velden

Hier moest je de productformule (stelling 3.2.7 p110) geven en bewijzen.

1.3 Lineaire Algebra

In deze vraag werd gesproken over een afbeelding $L : V \rightarrow V^*$. Het doel was om Lemma 4.5.9 (p184) te bewijzen. Daarna moest het bestaan (en niet de uniciteit) van de adjuncte afbeelding (stelling 4.5.8) bewezen worden. Daarvoor is het handig om de theorie over een duale lineaire afbeelding (p185) te kennen.

2 Oefeningen

2.1 Groepentheorie

Stel G een groep met orde mn waarbij m en n relatief priem zijn. Stel N een normaal deler van orde n .

- (a) Toon aan dat $N = \{a \in G \mid \text{de orde van } a \text{ deelt } n\}$
- (b) Wat loopt er mis als m en n wel een gemeenschappelijke deler hebben?
Geef een tegenvoorbeeld.

2.2 Veeltermringen

Bekijk volgende ringen:

$$R = \frac{\mathbb{R}[X, Y]}{(Y^2 - X^3)}$$

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i T^i \mid a_1 = 0 \right\} = \mathbb{R}[T^2, T^3]$$

- (a) Toon aan dat elk element van R geschreven kan worden als $f(X)Y + g(X)$ met $f, g \in \mathbb{R}$.
- (b) Geef (of bestaat er) een isomorfisme ϕ met $\phi(X) = T^2$ en $\phi(Y) = T^3$?
- (c) Bewijs dat R een domein is.
- (d) Toon aan dat R geen UFD is.

2.3 Veeltermen in velden

Zij q de macht van een priemgetal.

- (a) Hoeveel idealen heeft $\frac{\mathbb{F}_q[X]}{(X^q - X)}$?
- (b) Welke van deze idealen zijn maximaal?

2.4 Jordanvorm

Geef een inverteerbare matrix P en een Jordanvorm J zodat $J = P^{-1}AP$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Het was wel een teleurstelling dat er geen $(A - \lambda I)^k$ gegeven was.)