Examen Analyse II

14 januari 2019

1. Zij $P \in \mathbb{R}[x]$ een veelterm. Zoek een voldoende en nodige voorwaarde zodat
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = P(|x+y|)$$
totaal afleidbaar is.

2. Voor welke waarden van α en β is
$$f : (0,1] \times (0,1] : f(x,y) = x^\alpha y^\alpha (x+y)^\beta$$
een integreerbare functie?

3. Zij $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een orthonormale basis van $L^2([0,2\pi])$. Toon aan dat
$$\frac{1}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\widehat{\psi_n}(k)\right|^2 .$$

4. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ een functie zodat voor elke x de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : y \mapsto f(x,y)$ integreerbaar is. Vind een niet trivale voldoende voorwaarde op f zodat
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : F(x,t) = \int_R f(x,y) e^{-2\pi i y t} dy$$
een continue functie is.

5. Zij $\phi : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ een positief meetbare functie zodat $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1$. Definieer voor $n \in \mathbb{N}$ functies ϕ_n, zodat $\phi_n(x) = n\phi(nx)$.
   (a) Wat is $\lim_{n\to\infty} \widehat{\phi_n}(t)$, voor elke $t \in \mathbb{R}$?
   (b) Toon aan dat voor elke $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ de limiet $\lim_{n\to\infty} ||f * \phi_n - f||_1 = 0$.