Examen Analyse II

3 FEB 2017

Deze vragen zijn onder voorbehoud. Er kan altijd een typfout ingeslopen zijn. Het examen stond op 18 punten. De twee overige punten konden verdiend worden met het inleveren van wekelijkse huistaken.

MONDELING

1. Bewijs *lemma 4.41* op pagina 151.

2. Zij $K \subset L^2(\mathbb{R})$, gedefinieerd door

$$K = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad \forall n \in \mathbb{Z} : \int_n^{n+1} f(x)dx = 0 \right\}$$

   A. Toon aan dat $K \subset L^2(\mathbb{R})$ gesloten is.

   B. Bepaal $K^\perp$ en bewijs.

   C. Formuleer en bewijs de loodrechte projectie

$$p_k : L^2(\mathbb{R}) \to K.$$

SCHRIFTELIJK

3. Zij $\alpha > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Waar is f totaal afleidbaar?

4. Voor welke waarden $\alpha, \beta > 0$ is f integreerbaar?

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{(x^\alpha + x^\beta)^2}.$$

5. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Zij

$$D(\varepsilon) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad 0 < x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\right\}.$$

Bepaal de limiet

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{D(\varepsilon)} \frac{1 + \sin(x) + \sin(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} d(x, y).$$

Bewijs nauwkeurig.