

ANALYSE II

(01/02/2012 (8u-12u))

- 1] Zij $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een strikt stijgende rij in $\mathbb{R}$ met $r_0 = 0$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$. Definieer voor $\alpha > 0$ de functie

$$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} (x - r_n)^{-\alpha} & \text{als } n \in \mathbb{N} \text{ en } r_n < x < r_{n+1} \\ +\infty & \text{als } n \in \mathbb{N} \text{ en } x = r_n \end{cases}.$$

1. Zoek een formule voor de integraal $\int_{[0,1)} f(x)dx$ en bewijs je veronderstelling.
2. Kan je een expliciete rij $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en een $\alpha > 0$ vinden zo dat $\int_{[0,1)} f(x)dx < +\infty$?

- 2] Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ afleidbaar en integreerbaar. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(-x) = f(x)$. Bewijs dat $\hat{f}$ een oneigenlijk integreerbare functie is. Zoek en bewijs een formule voor de oneigenlijke integraal van $\hat{f}$ in termen van f .

- 3] Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = x |x - y|.$$

In welke punten is f totaal afleidbaar? Bewijs.

- 4] Zij $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Bewijs dat

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f * g)(x) = 0.$$

Hint. Laat je inspireren door het bewijs van de continuïteit van $f * g$.

- 5] Definieer $K \subset L^2(\mathbb{R})$ als

$$K = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \text{voor bijna alle } x \geq 0 \text{ is } f(-x) = 2f(x)\}.$$

1. Zoek een expliciete uitdrukking voor $K^\perp$ en bewijs je bewering.
2. Zoek een expliciete formule voor de orthogonale projectie $p_K(f)$ van $f \in L^2(\mathbb{R})$ op K .

◇ ◇ ◇