# Examen Analyse II

15 januari 2018

Omdat we met een grote groep waren was er voor dit examen maar één mondelinge vraag. Je kreeg 2 uur om deze af te werken, daarna werd je één voor één geroepen om ze mondeling te komen verdedigen. Het examen duurde in totaal 4 uur.

## 1 Mondelinge vraag

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie en definieer

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : g(x, y) = 3cos(y) + f(y)sin(x) \tag{1}$$

Toon aan dat de functie g totaal afleidbaar is in het punt (0,0) als en slechts als f continu is in 0. Je krijgt ook al een deel van de punten als je één van de twee implicaties hebt bewezen.

## 2 Schriftelijke vraag

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een $2\pi$-periodische functie die integreerbaar is op $[0, 2\pi]$. Zij $x \in \mathbb{R}$ en stel dat de linker- en rechterlimiet $f(x+)$ en $f(x-)$ bestaan. Definieer $t_n$ zoals in Stelling 4.12. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \tag{2}$$

## 3 Schriftelijke vraag

Zijn de volgende uitspraken waar of fout? Argumenteer nauwkeurig

**a** Als twee functies f en g van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ integraarbaar zijn, dan is fg ook integreerbaar.

**b** Zij $(e_n)_n$ een orthonormale basis van de Hilbertruimte H en stel $(a_n)_n$ een rij uit $l^2(\mathbb{N})$ Definieer

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k \tag{3}$$

Dan is de rij $(\xi_n)_n$ een convergente rij in H.

**c** Zij $f(x) = \ln(1+x^2)e^{-x^2}$. Dan is de Fouriergetransformeerde $\hat{f}$ willekeurig vaak afleidbaar.

# 4 Schriftelijke vraag

Voor deze vraag krijg je gegeven dat

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{1+x^2} \tag{4}$$

Definieer

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \tag{5}$$

**a** Toon aan dat F een goed gedefinieerde, integreerbare functie is en dat $F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

**b** Bepaal $\lim_{x\to\infty} F(x)$ en argumenteer nauwkeurig.

**c** Gebruik puntjes (a) en (b) om een formule voor F(x) te geven en bewijs deze.