Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
bachelor Fysica, bachelor Wiskunde (verplicht)
bachelor Economische Wetenschappen (keuze)

en

bachelor Wijsbegeerte (keuze)

maandag 23 augustus 2010, 14:00-18:00

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 2 pt	(b) 4 pt	(c) 4 pt	
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 2 pt	(c) 5 pt	
Vraag 3:	(a) 2 pt	(b) 2 pt	(c) 4 pt	(d) 2pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt		
Vraag 5:	(a) 2 pt	(b) 4 pt	(c) 4 pt	

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Bij deze vraag volstaat het om uw antwoord toe te lichten. Volledige bewijzen worden niet gevraagd. Zoals bekend is $P(X)$ de machtsverzameling van X.

(a) Geef alle elementen van $P(X)$ en van $P(P(X))$ als $X = \emptyset$.

(b) Neem aan dat X een eindige verzameling is met $|X| = n$.

  (i) Hoeveel deelverzamelingen van $X \times P(X)$ zijn er?

  (ii) Hoeveel functies $f : X \to P(X)$ zijn er met de eigenschap dat $x \notin f(x)$ voor alle $x \in X$?

(c) Zijn de volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar?

  (i) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

  (ii) De verzameling van alle convergente rijen (a_n) met $a_n \in \mathbb{Z}$ voor elke n.

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Laat zien dat voor elke $B_1, B_2 \in P(Y)$ geldt dat

$$B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2). \tag{1}$$

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat de implicatie

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subset B_2 \tag{2}$$

niet waar hoeft te zijn.

(c) Bewijs dat (2) geldig is voor elke $B_1, B_2 \in P(Y)$ als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 3 Zij $f : X \to \mathbb{R}$ een functie. Zij R de relatie op X gegeven door $(x, y) \in R$ als en slechts als

$$f(x) \leq f(y).$$

(a) Laat zien dat R reflexief en transitief is.

(b) Laat door middel van voorbeelden zien dat R niet noodzakelijk symmetrisch is en ook niet noodzakelijk anti-symmetrisch.

(c) Bewijs dat R een orderelatie is als en slechts als f injectief is.

(d) Kan het zijn dat R een equivalentierelatie is? Zo ja, geef voorwaarde op f opdat R een equivalantierelatie is. Zo nee, geef een bewijs dat het niet kan.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij (a_n) van reële getallen.

(b) Bewijs vanuit de definitie dat de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \frac{n^2 - 5}{3n^2 + 4n + 2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

convergent is.

Naam:

Vraag 5 (a) Geef de definitie van $\limsup_{n\to\infty} a_n$ voor een begrensde rij (a_n) van reële getallen.

(b) Bewijs dat voor elk tweetal begrensde rijen (a_n) en (b_n) van reële getallen geldt dat

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Geef ook een voorbeeld waaruit blijkt dat gelijkheid niet altijd hoeft te gelden.

(c) Neem aan dat (b_n) een Cauchyrij is. Bewijs dat de gelijkheid

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

geldt voor elke begrensde rij (a_n).