

Examen Bewijzen en Redeneren

16 januari 2020

Vraag 1

Stel dat $f : X \rightarrow Y$ een functie is en $A \subset X$ en $B \subset Y$.

- (a) Bewijs dat steeds geldt dat:

$$A \subset f^{-1}(B) \implies f(A) \subset B.$$

- (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat

$$f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

niet hoeft te gelden.

- (c) Bewijs dat voor een functie $f : X \rightarrow Y$ geldt dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : f^{-1}(B) \subset A \implies B \subset f(A)$$

als en slechts als f surjectief is.

Vraag 2

Met $\text{Fun}(X, Y)$ bedoelen we de verzameling van alle functies van X naar Y . Beschouw nu de relatie R op $\text{Fun}(X, Y)$ zodanig dat $(f, g) \in R$ als en slechts als

$$\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

een eindige verzameling is.

- (a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.
- (b) Stel nu dat $X = \mathbb{N}$ en $Y = \{0, 1\}$. Hoe groot zijn de equivalentieklassen van R ? (eindig, aftelbaar oneindig, overaftelbaar)

Vraag 3

Stel dat A en B niet-lege naar boven begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. De verzameling C wordt gegeven door:

$$C = \{\max\{x, y\} \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

- (a) Bewijs dat C naar boven begrensd is en dat

$$\sup C = \max\{\sup A, \sup B\}$$

- (b) Als A en B beide open verzamelingen zijn, is C dat ook een open verzameling? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Vraag 4

- (a) Geef de ε - n_0 -definitie van convergentie van een reële rij.
- (b) Bewijs dat de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \begin{cases} e^{n!} & n < 2020 \\ \frac{n^2 + \sin(n)}{5n - 2n^2} & n \geq 2020 \end{cases}$$

convergent is met behulp van de ε - n_0 -definitie.

Vraag 5

Stel voor deel (a) en (b) dat

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n^2}.$$

- (a) Bewijs dat

$$|x_m - x_n| \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

geldt $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$.

- (b) Bewijs dat uit (a) volgt dat (x_n) een Cauchyrij is.
- (c) Stel nu dat dit geldt:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Is (x_n) dan ook steeds een Cauchyrij. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.